# GRÁFICAS Y FUNCIONES

## ÍNDICE: Página

# GRÁFICAS Y FUNCIONES

## 1. Introducción

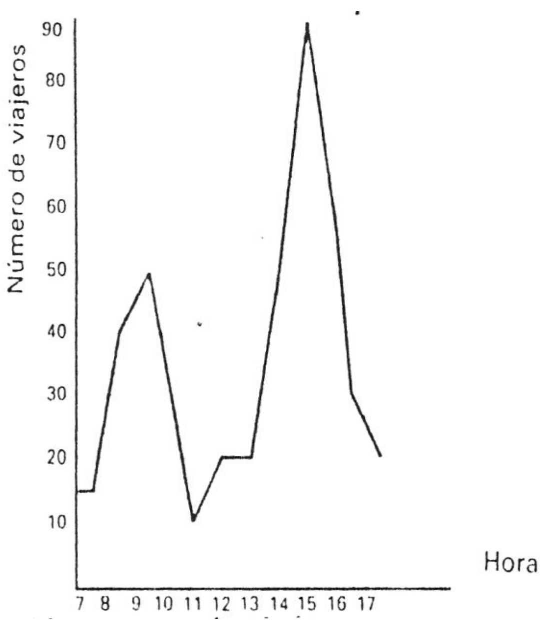
Numerosos fenómenos en cualquier campo de la actividad humana, de la naturaleza o de relación entre las personas son más fáciles de entender o cuentan con la ayuda de los gráficos para presentar de forma más atractiva la información que nos están proporcionando. No tenemos más que hojear cualquier periódico o fijamos en cualquier informativo de la televisión para corroborar estas palabras: gráficos sobre la incidencia de SIDA en España, sobre el consumo de alcohol de los jóvenes, sobre las reservas hidrológicas en los pantanos andaluces, ...

Y es que en los medios de comunicación social encontramos numerosos ejemplos que muestran que las noticias se entienden con mayor facilidad si van acompañadas de gráficos que las ilustren. Hemos de tener en cuenta que a partir de un gráfico podemos sacar muchas consecuencias, una gran cantidad de información que a primera vista no percibimos que está ahí. Y es que de cualquier gráfica podemos obtener una serie de consecuencias que nos explican el fenómeno o el hecho que estemos estudiando.

Por consiguiente, al empezar a estudiar este tema, es importante que valoremos la importancia de la comprensión de fenómenos mediante gráficas, y que veamos en ello una necesidad y una ayuda para acceder a todo tipo de información en el mundo que nos rodea. Nosotros, además, estando en clase de matemáticas, no sólo vamos a interpretar fenómenos mediante gráficas sino que también vamos a aprender a realizarlas y a estudiar sus características, así como a conocer otros tipos de representación de fenómenos aparte de las gráficas. Por último dedicaremos un tiempo al estudio de determinado tipo de gráficas.

Veamos un ejemplo para comprender mejor todo lo anteriormente expuesto:

La siguiente gráfica representa el número de personas que transita por una estación de Metro según la hora del día. ¿Crees que esto es importante para la Empresa de Transportes Urbanos? Ten en cuenta que, por ejemplo en Madrid, es una empresa pública que intenta dar un servicio a todos los usuarios de la ciudad. Por tanto, deberá hacerlo de la forma más óptima posible, adecuando la oferta de trenes a la demanda de viajeros, de forma que en las horas punta la espera no se prolongue más de lo debido, y que en las horas de menor afluencia de viajeros los trenes tampoco vayan vacíos.




Nos damos cuenta que la información que

transmite la gráfica es fácil de entender. Pero aumenta si estudiamos el fenómeno desde el punto de vista matemático, Así, podemos deducir los siguientes resultados:

Aparecen relacionadas dos variables, una es la hora del día y la otra el número de usuarios de la estación.
La primera variable se denomina **variable independiente** y aparece en el eje horizontal o de abscisas. La segunda la llamamos **variable dependiente** y aparece en el eje vertical o de ordenadas. Reciben estos nombres porque el número de personas va a depender de la hora del día y no al contrario.
La gráfica está realizada tomando una determinada escala para cada eje. Esto es importante para que la gráfica tenga el tamaño adecuado. En este ejemplo la escala es: en el eje de abscisas, un cuadro equivale a una hora, y en el de ordenadas un cuadro a diez personas.
El punto (13, 20) está en la gráfica. Esto significa que cuando son las 13 horas corresponde un número de 20 usuarios en la estación. En cambio, el punto (14, 10) no está en la gráfica: cuando son las 14 horas no hay 10 usuarios.
La máxima afluencia de usuarios se da a las 15 horas, y la mínima a las 11 de la mañana.
La gráfica tiene sentido para valores de tiempo comprendidos entre las 7 y las 15 horas (tiempo que permanece abierta la estación). Siempre que hablemos de esta cuestión nos referiremos a los valores de la variable independiente para los cuales existe la gráfica.
Podemos comentar la evolución de usuarios a lo largo del día: Empieza constante hasta las 8 de la mañana, hora a partir de la cual empieza a aumentar el número de usuarios hasta las 9h. l5min., descendiendo su número hasta las 11 de la mañana. A partir de aquí empieza a aumentar hasta las 15 horas, que es cuando se alcanza la máxima afluencia, disminuyendo esta hasta la hora de cierre.

Como vemos, los datos se han representado muy fácilmente en la gráfica, y fácil ha sido también el sacar conclusiones estudiando detenidamente la gráfica en cuestión.

La gráfica anterior es un ejemplo en el que aparece una variable **continua**, la hora del día, es decir, puede tomar cualquier valor entre dos dados (entre las 11 y las 11 h. l5min. puede llegar en cualquier instante de tiempo) y otra variable **discreta**, el número de usuarios, o sea, toma valores fijos y no puede darse un valor intermedio (o hay 15 usuarios o 16, no puede haber 15 usuarios y medio).

## 2. Formas de expresar la relación entre dos variables

### a) Mediante una gráfica:

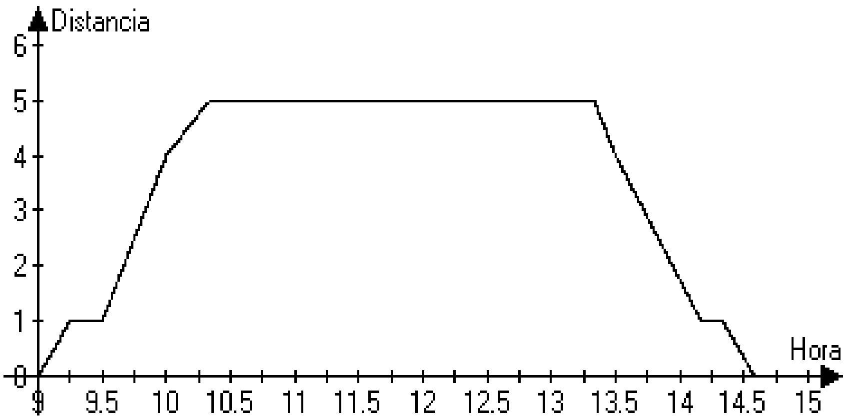
En el ejemplo anterior la relación entre la hora del día y el número de usuarios venía expresada mediante una gráfica.

### b) Mediante un texto:

A partir de la lectura detallada de un texto en el que se expresa la relación entre dos variables podemos construir una gráfica que permita visualizar esa misma información representando cada variable en uno de los ejes.
Veamos un ejemplo: “Un grupo de amigos sale de su casa a las 9 de la mañana para pasar un día en el campo. Andan durante 15 minutos hasta llegar a una

fuente que se encuentra a 1 Km de distancia. Aquí paran durante l5 minutos y a continuación siguen la marcha con más ánimo, recorriendo los siguientes 3 Km en 30 minutos. Seguidamente llega una cuesta de 1 Km, por lo que tardan 20 minutos en recorrerla. Así llegan al lugar donde van a pasar el día, estando aquí durante 3 horas. Inician así el camino de regreso, tardando en el primer tramo 10 minutos, 40 en el segundo, parando en la fuente durante 10 minutos y el tercero realizándolo en 15 minutos."

Realizamos una gráfica en la que se exprese, a partir del enunciado anterior, la relación entre la hora del día y la distancia a la que se encuentran de su casa. Cuestiones a tener en cuenta: cuál es la variable independiente, cuál es la dependiente y escalas.




**Esta gráfica muestra la relación entre la hora del día y la distancia a que se encuentra de casa un grupo de amigos**

Por tanto, hemos transformado la información que nos daba un enunciado en una gráfica. También puede hacerse el proceso contrario.

¿Sabrías decir, a partir de la gráfica, en quÉ tramo es mayor la velocidad?

**c) Mediante una tabla:**

Si colgamos un muelle por un extremo y aplicamos un peso en el otro, se produce un alargamiento que se refleja en la siguiente tabla:

| Peso (en gramos) | Alargamiento (en centímetros) |
|---|---|
| 100 | 5 |
| 200 | 10 |
| 300 | 15 |
| 400 | 20 |

a) Representa estos datos en unos ejes. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?
b) ¿Sabrías calcular el alargamiento que corresponde a un peso de 500 gr.?

c) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Por qué?
d) A partir de lo anterior, ¿qué alargamiento correspondería a un peso de 350 gr.?
e) Intenta sacar una fórmula que te permita calcular el alargamiento a partir del peso.
f) Aplica lo anterior para comprobar que el alargamiento para 350 gr. es también puedes calcularlo de esta manera, y halla el alargamiento para un cuerpo de 600 gr. de peso.

Es importante que nos demos cuenta que con este ejercicio hemos expresado un mismo fenómeno de tres formas distintas: mediante una tabla, una gráfica y una expresión algebraica que relaciona las variables. Tenemos así una cuarta forma de expresar la relación entre dos variables.

**d) Mediante expresiones algebraicas sencillas:**

En el caso anterior hemos deducido que el $\text{Alargamiento} = \frac{\text{Peso}}{200}$.

$l = \frac{P}{200}$ es un ejemplo en el que relacionamos dos variables mediante una expresión algebraica. La variable independiente puede tomar cualquier valor, y según este calculamos el valor que le corresponde a la variable dependiente.

El peso es la variable independiente y el alargamiento la dependiente. La variable dependiente aparece siempre despejada para calcularla a partir de la independiente. Es lo que **también llamamos una función.**

Así, son ejemplos de funciones:

- Cuando un móvil va a una velocidad constante de 80 km/h, la función que expresa la relación entre el espacio y el tiempo es $e = 80t$
  Dependiendo del tiempo, podemos calcular el espacio que le corresponde:
  - ✓ cuando $t = 1$ hora, $e = 80 \cdot 1 = 80$ Km
  - ✓ cuando $t = 3$ hora, $e = 80 \cdot 3 = 240$ Km

- Si un móvil partió con velocidad inicial 0 y lleva una aceleración constante de 2 $m/sg^2$, la función que expresa la relación entre el espacio y el tiempo es $e = t^2$
  De la misma forma:
  - ✓ cuando el tiempo es 3 sg. el espacio es $e = 3^2 = 9\,\text{m}$
  - ✓ cuando el tiempo es 5 sg. el espacio es $e = 5^2 = 25\,\text{m}$

En los casos anteriores nos aparece ya dada la función, pero habrá veces en que tendremos que deducirla a partir de un enunciado.

Ejemplo: Tenemos una cuerda de 80 cm. Expresa la superficie que tendrán los rectángulos que podamos construir con ella a partir de lo que mida la base.

*1^er^ Paso.- Aproximación al problema:*

Con una cuerda podemos construir muchos rectángulos diferentes. Los 80 cm de la cuerda es el perímetro del rectángulo, luego tenemos muchas opciones:

| | | |
|---|---|---|
| $b = 30$ cm | $b = 25$ cm | $b = 23$ cm |
| $h = 10$ cm | $h = 15$ cm | $h = 17$ cm |

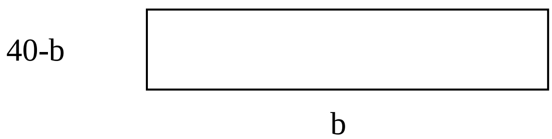
Cada uno de estos rectángulos tendrá un área:

$$S = 30 \cdot 10 = 300\, cm^2 \quad S = 25 \cdot 15 = 375\, cm^2 \quad S = 23 \cdot 17 = 391\, cm^2$$

Pero esto no es lo que nos pide el ejercicio. Tenemos que buscar una expresión algebraica, una fórmula que nos permita calcular cual es el área a partir de cualquier base.

*2º Paso.- Resolución del problema:*

La base, por tanto, podrá ser cualquier número, y a partir de este hemos de hallar el área. Así que a la base la representamos por *b*, que puede ser cualquier longitud que nos sirva como base.
Si la base mide *b*, ¿cuánto mide el área?
El dato que tenemos es que la cuerda mide 80 cm, esto es, que el perímetro es de 80 cm. De aquí, ¿cómo calculamos el área? Sabemos la base, nos falta la altura.¿Cuánto mide?
Si el perímetro es 80 y la base *b*, entonces la altura mide *40 - b*
Tenemos:




Por tanto: $\text{Área} = b \cdot h = b(40 - b) = 40b - b^2$ $\boxed{A = 40b - b^2}$

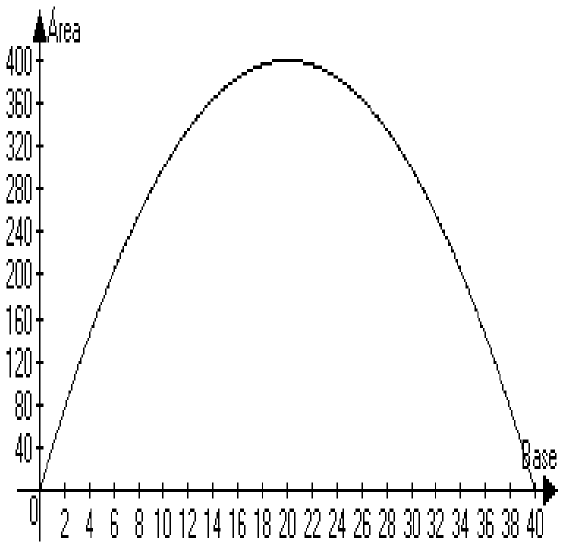
Esta expresión que nos permite calcular el área a partir de la base es la función del área que depende de la base para rectángulos realizados con una cuerda de 80 cm.

Sustituyendo en la función podemos calcular cualquier valor de área a partir de lo que valga la base.

Ejercicio: Comprueba que obtienes el mismo resultado que antes para una base de 30 cm, y halla el área cuando la base mide 28 cm.

Además podemos construir una tabla que nos sirva para aproximar la gráfica de la función. Para ello lo primero es darnos cuenta los valores que puede tomar la base, $b$, que es la variable independiente. Como estamos con una cuerda de 80 cm, la base puede medir cualquier valor hasta 40 cm, pero sin incluir ninguno de los dos valores, es decir, $b$ puede ser cualquier numero del intervalo $(0,40)$ (0 no lo incluimos porque si la base es 0 no tendríamos un rectángulo, y 40 tampoco porque si la base es 40 la altura sería 0 y tampoco tendríamos un rectángulo). Construimos una tabla con valores de la base y los que le corresponden de Área sustituyendo en la función.

| $b$ | $A = 40b - b^2$ |
|---|---|
| 1 | 39 |
| 5 | 175 |
| 10 | 300 |
| 15 | 375 |
| 20 | 400 |
| 30 | 300 |
| 35 | 175 |
| 39 | 39 |
| 39.5 | 19.75 |
| 39.9 | 3.99 |
| 39.99 | 0.3999 |




**Esta es la gráfica del área a partir de la base para rectángulos de 80 cm de perímetro**

La gráfica empieza en el punto (0, 0) y termina en el punto (40, 0) pero sin incluir a ambos por lo que hemos explicado sobre la longitud de la base.

Con este ejemplo hemos construido una función y la hemos representado gráficamente. ¿Qué es entonces una función? Una **función** es una expresión algebraica en la que la variable dependiente aparece expresada a partir de la variable independiente, y a partir de cualquier valor que demos a la variable independiente podemos calcular el que le corresponde de la variable dependiente.

La variable independiente puede tomar cualquier valor para los cuales tenga sentido la función o su gráfica.

A cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la variable dependiente, y diremos que es su imagen. Pero dos valores distintos de la variable independiente pueden tener la misma imagen.

Ejemplo 1:

Para la función $p = a^2$:

La imagen de $a = 2$ es $p(2) = 2^2 = 4$

La imagen de $a = -2$ es $p(-2) = (-2)^2 = 4$

La imagen de $a = 5$ es $p(5) = 5^2 = 25$

La imagen de $a = -5$ es $p(-5) = (-5)^2 = 25$

Cada valor de *a*, variable independiente, tiene una única imagen, es decir, se le asocia un único valor de la variable independiente. Pero puede ocurrir, como en este caso, que dos valores de la variable independiente tengan la misma imagen.

Además, con la expresión analítica de una función hemos calculado el valor exacto de cada imagen, éstas las calculamos con exactitud.

Ejemplo 2:

Al coger un taxi el precio de bajada de bandera es de 2 €, y cada kilómetro recorrido cuesta 2'25 €. Si llamamos *x* al número de kilómetros recorridos y *p* al precio del viaje, el coste total se puede expresar mediante la función:

$$p = 2 + 2'25x$$

Por ejemplo, para un viaje de 2 kilómetros el precio será:

$$p(2) = 2 + 2'25 \cdot 2 = 2 + 4'5 = 6'5 \text{ €}$$

El precio para un trayecto de 3'5 Km será:

$$p(3'5) = 2 + 2'25 \cdot 3'5 = 2 + 7'875 = 9'875 \text{ €}$$

En este caso la variable independiente, *x = distancia recorrida*, es una variable continua.

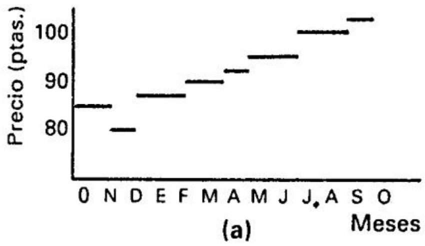
## 3. Características globales de una función:

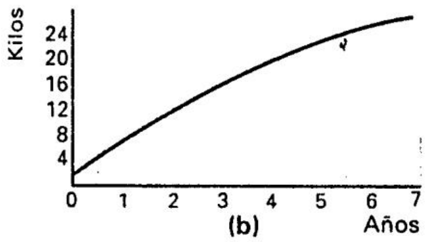
Vamos a estudiar desde el punto de vista matemático cuales son las características generales de una función. La manera más fácil que tenemos de hacerlo es a partir de su gráfica, que es lo que hacemos seguidamente para cada una de las características a estudiar.

### 3.1. Continuidad / discontinuidad:

Para entenderlo, vamos a fijarnos en las gráficas de la derecha .

La gráfica (a) expresa el coste del litro de gasolina súper en el período de octubre de 1991 a octubre de 1992. La segunda (b) representa la relación entre la edad y el peso de un niño desde que nace hasta los siete años.
En la primera, la gráfica de la función se va interrumpiendo: el cambio de un precio a otro, no pasa por precios intermedios.
En la segunda, el valor del peso va aumentando progresivamente, sin saltos, de forma continuada.




La primera función es discontinua, lo cual significa que hay puntos en los que se produce un salto. Estos se denominan puntos de discontinuidad de la función. La segunda es una función continua, ya que toma todos los valores intermedios de peso, no hay saltos.

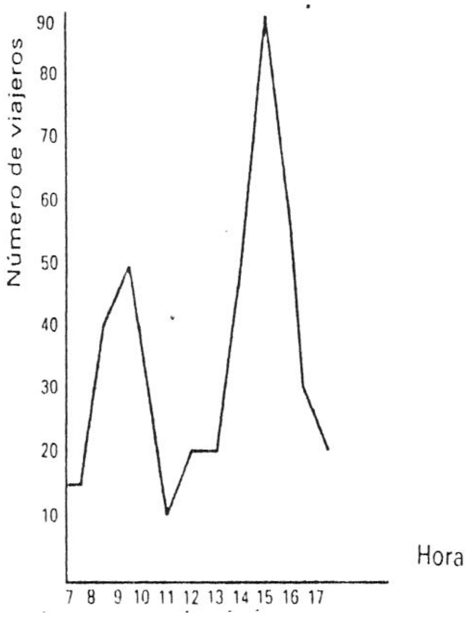
***Ejercicio***:

Haz una gráfica, a partir de una tabla de datos, que represente el coste de un aparcamiento en función del tiempo utilizado, de acuerdo con las siguientes tarifas:

- ✓ Primera hora o fracción, 1’5 €
- ✓ Cada hora siguiente o fracción, 1’25 €
- ✓ A partir de 9 horas, 11’5 € en total.

Explica si la función es continua o discontinua.

### 3.2. Crecimiento / decrecimiento / tramos constantes:




Si nos fijamos en la gráfica que relacionaba la hora del día con el número de usuarios de una estación de metro, podemos observar que el número de viajeros iba en aumento desde las 7:30 hasta las 9:30 Es decir, en este espacio de tiempo, al ir aumentando el tiempo también aumentaba el número de usuarios. Decimos entonces que esta función es creciente en el tramo (7:30, 9:30).

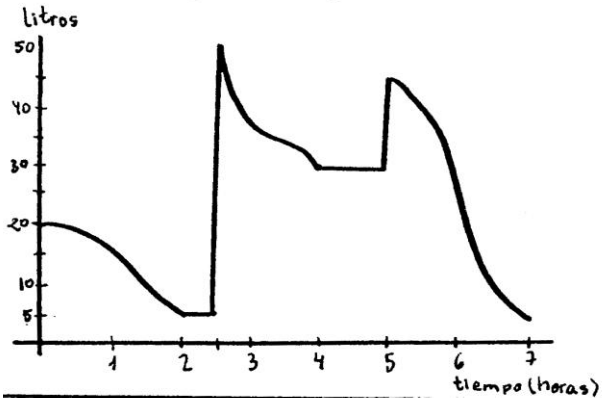
Si sigues observando, verás que desde las 9:30 hasta las 11:00 el número de pasajeros disminuye a medida que avanza el tiempo. Es decir, en este espacio de tiempo al ir aumentando el tiempo el número de usuarios ha ido disminuyendo. Decimos entonces que esta función es decreciente en el tramo (9:30,11:00).

En cambio, entre las 12:00 y las 13:00 no hay variación en el número de personas. En este caso, la función es constante.

Indica otros tramos en los que la función sea creciente, decreciente o constante.

***Ejercicio:***

La gráfica siguiente indica la cantidad de gasolina. que hay eh el depósito de un coche a lo largo de un viaje.




a) ¿Qué variables intervienen en la gráfica?
b) ¿Cuánta gasolina tenía en el momento de iniciar el viaje?
c) Indica los momentos de tiempo en que la cantidad de gasolina crece, decrece o se mantiene constante.
d) Intenta describir el viaje señalando los momentos en que el coche está rodando, cuándo para, cuándo echa gasolina, cuánta echa, etc.

### 3.3. Máximos y Mínimos absolutos (extremos absolutos):

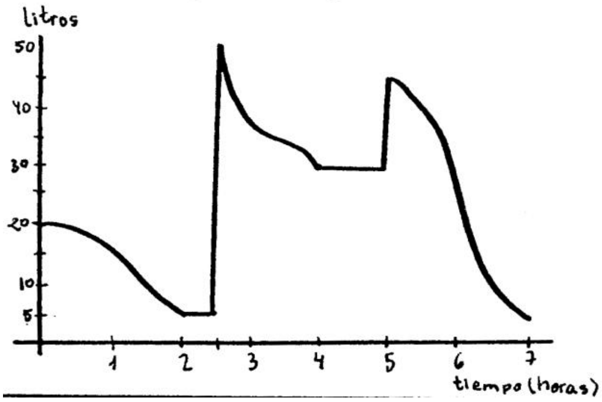
Fijándonos nuevamente en la gráfica que relaciona la hora con el número de usuarios de una estación de metro, podemos fijarnos en los puntos que representan la mayor y la menor afluencia de viajeros en todo el día. Estos puntos son (15 h., 90 personas) y (11 h., 10 personas). Si nos damos cuenta, son el punto más alto y más bajo de la gráfica, son sus **valores extremos**, y se les denomina, respectivamente, **máximo** y **mínimo absolutos**.
Suele decirse que las 15:00 h es una hora punta: número máximo de viajeros; y que las 11:00 h. es una hora valle: número mínimo de viajeros.

### 3.4. Máximos y Mínimos relativos (extremos relativos):

De igual manera, podemos darnos cuenta que en la misma gráfica hay puntos en los que sean o no extremos absolutos, la gráfica presenta un cambio en la tendencia pasando de crecer a decrecer o viceversa. Estos puntos son los llamados **extremos relativos**. Tendremos un **máximo relativo** cuando en ese punto la gráfica pase de crecer a decrecer, y el punto será un **mínimo relativo** cuando en él la gráfica pase de decrecer a crecer. Así, son máximos relativos (9:30 h. , 50 personas) y (15:00 h , 90 personas) y el mínimo relativo es (11:00 h., 10 personas).

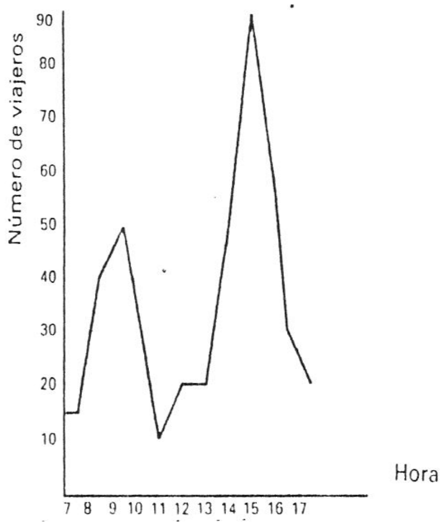
***<u>Ejercicio:</u>***

Indica cuales son los extremos absolutos y relativos en la gráfica que mide el consumo de gasolina de un coche durante un viaje.




### 3.5. Dominio de definición:

Cuando tenemos definida una función, ya sea mediante su expresión analítica o mediante su gráfica, podemos darnos cuenta que hay una serie de valores de la variable independiente para los que tiene sentido la función, bien porque podemos calcular las imágenes, bien porque para ellos existe la gráfica. Fijándonos nuevamente en la gráfica que relaciona la hora y el número de usuarios de una estación de metro, podemos preguntarnos: ¿para qué valores de tiempo (variable independiente) tiene sentido la gráfica?



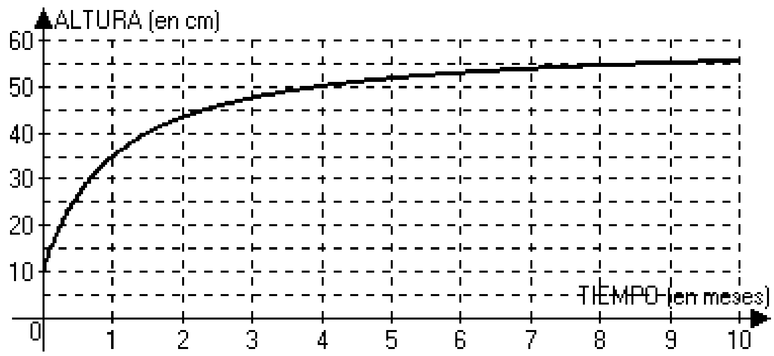

**Podemos darnos cuenta de que la gráfica sólo aparece para valores de tiempo comprendidos entre las 9 horas y las 17 horas. Vamos a decir entonces que el dominio de esta función es el intervalo** $[9,17]$**. Los corchetes indican que los extremos también los incluimos. Cuando algún extremo de un intervalo no se incluya en el dominio, usaremos los símbolos** $($ **o** $)$.

***Ejercicio 1:***

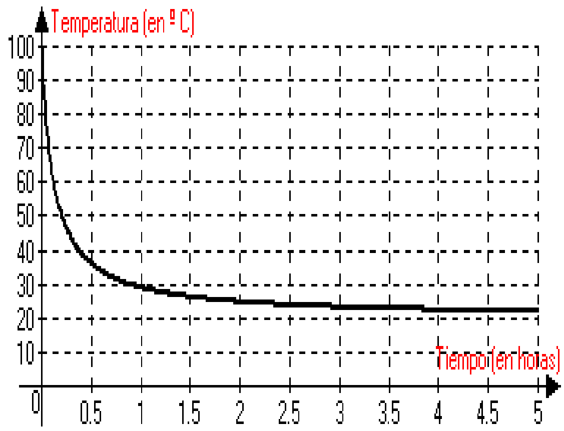
Calcula el dominio de definición de la función que expresa la cantidad de gasolina en el depósito de un coche en función del tiempo.

***Ejercicio 2:***

La gráfica del margen describe el crecimiento de una planta con el paso del tiempo. Indica cual es el dominio y explica su significado.




### 3.6. Tendencias:




Hay veces que nos interesa saber como se comporta una función al aumentar mucho la variable independiente, de manera que podemos predecir que va a ocurrir o qué forma tendrá la función cuando la variable independiente es muy grande, porque las imágenes tenderán a acercarse a algún valor. Cuando al aumentar la variable independiente las imágenes se acerquen cada vez más a un valor concreto, diremos que la tendencia de la función es acercarse a dicho número.

La gráfica del margen muestra la temperatura conforme avanza el tiempo cuando dejamos enfriar una olla de agua hirviendo que se encuentra en una habitación a 20º C. Claramente, al pasar el tiempo la temperatura se irá aproximando cada vez más a 20ºC. Cuanto mayor sea el tiempo, más próxima estará la temperatura (su imagen) de 20º C. Por tanto, la tendencia de esta función es aproximarse a 20º C.

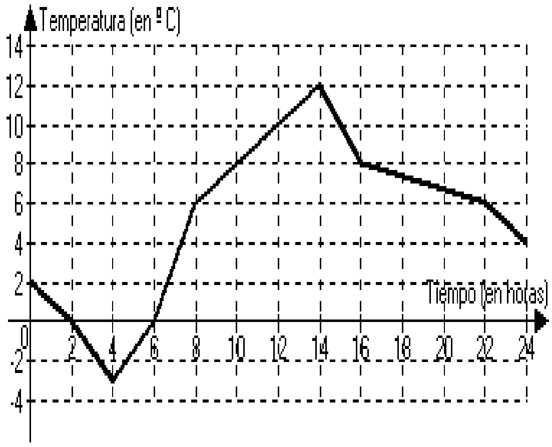
***Ejercicio:***

¿Existe alguna tendencia en el ejemplo estudiado en el apartado anterior que medía el crecimiento de una planta?

Evidentemente, no en todas las funciones va a existir tendencia. ¿Puedes poner un ejemplo donde no exista ningún tipo de tendencia?

### 3.7. Puntos de corte con los ejes:

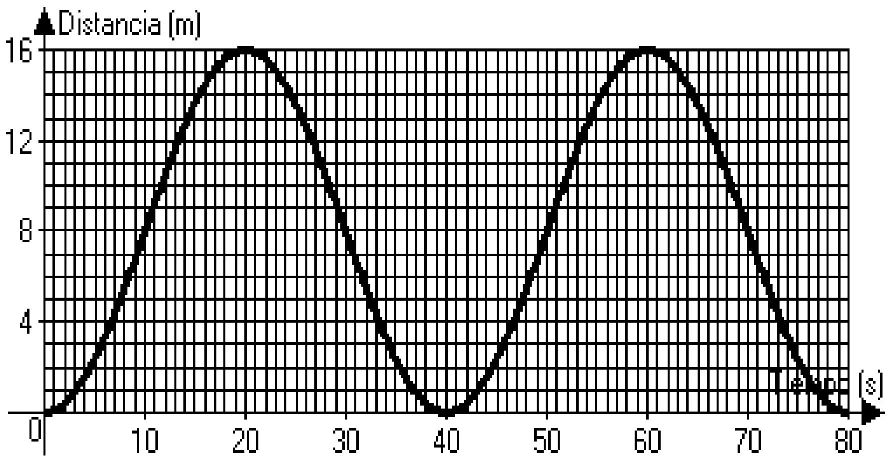
La gráfica de la derecha muestra la temperatura atmosférica a lo largo de un día.¿Hay algún punto en el que la gráfica corta a los ejes? Observamos que el eje de ordenadas la corta en el punto (0, 2), lo que indica que a las cero horas la temperatura era de 2º C. Los puntos de corte con el eje de abscisas son (2, 0) y (6, 0), lo que significa que se llega a los 0º C a las 2 y a las 6 de la mañana.




¿Cuáles son entonces las características que cumplen los puntos en los que la gráfica corta a los ejes?
Los puntos de corte con el eje de ordenadas verifican que $x = 0$.
En los que corta al eje de abscisas, $y = 0$.

***Ejercicio:***

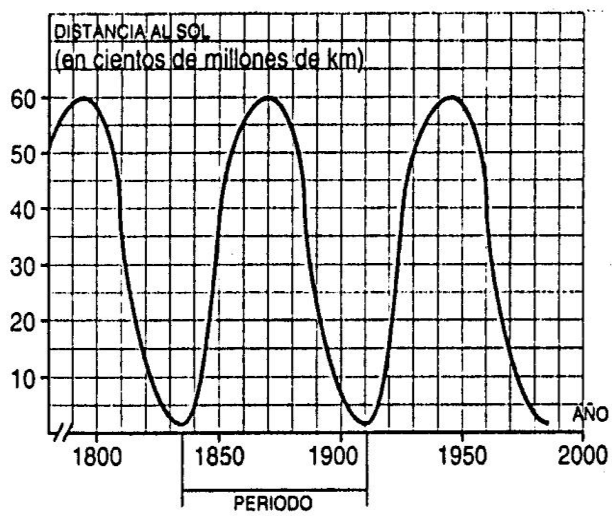
Indica los puntos de corte con los ejes de la siguiente gráfica:




**3.8. Periodicidad:**

A veces, aunque sólo conozcamos un trozo de la gráfica, podemos saber cómo se comporta la función fuera de ese tramo.

Por ejemplo, la gráfica de la derecha describe la distancia del cometa Halley al Sol a lo largo de los dos últimos siglos. La distancia al Sol del cometa depende del tiempo, y como realiza una órbita elíptica alrededor del Sol que dura 76 años, la función se repite también en ese período de tiempo. Es una función **periódica** de período 76 años. Cada 76 años se encuentra siempre a la misma distancia.



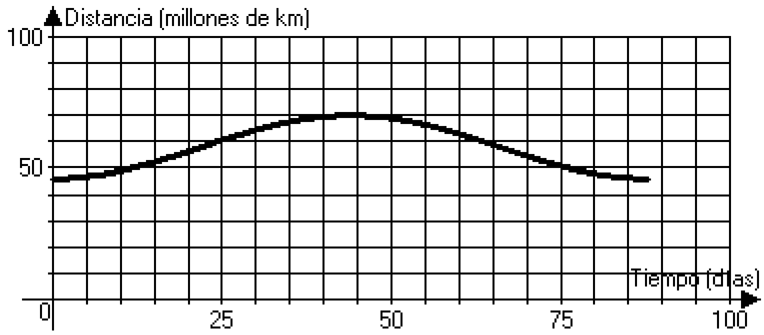

Las **funciones periódicas** son por tanto aquellas funciones cuyo comportamiento se va repitiendo cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. A la longitud de ese intervalo se le llama **período.**

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un período, pues en el resto de valores de la variable independiente la gráfica se va repitiendo. Sabiendo su gráfica en un período podemos dibujarla en cuantos períodos queramos.

***Ejercicio:***

Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros.

a. Completa la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.
b. ¿A qué distancia se encontrará a los 450 días?




# 4. Estudio analítico de una función:

## 4.1. <u>CONCEPTO DE FUNCIÓN:</u>

Ya hemos visto que una de las formas de representar la relación entre dos variables es mediante una expresión analítica que las relaciona. Sabemos que la variable que aparece despejada es la variable dependiente, de manera que sustituyendo la independiente por cualquier valor podemos calcular el que le corresponde a la dependiente, calculando lo que llamamos su imagen.

***<u>Ejemplo 1:</u>***

Si estamos estudiando la relación entre el tiempo transcurrido y el espacio que recorre un móvil y esta viene expresada mediante la función:

$$\boxed{e = t^2 - 4t + 5}$$

Sabemos que la variable independiente es el tiempo y la dependiente el espacio y podemos calcular para cada valor del tiempo el que le corresponde de espacio:

para $t = 2$ sg, $e = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$ m

Diremos que 1 es la **imagen** de 2 y escribiremos $e(2) = 1$
Si escribimos $e(5) = 10$ significa que la imagen de 5 es 10, es decir, que cuando $t = 5$ sg el espacio es de 10 m. (efectivamente $e(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 5 = 25 - 20 + 5 = 10$)

Decimos que el espacio **depende** del tiempo, o que el espacio es función del tiempo.

Normalmente, cuando expresamos la relación entre dos variables, utilizaremos la letra *x* para la variable independiente y la letra *y* para la dependiente.

Así, son ejemplos de funciones:

$y = 2x - 3$ $\qquad$ $y = 3x^4 - 5x$

También podemos emplear la expresión $f(x)$ para llamar a la variable dependiente, indicando que es función de *x*, esto es, que depende de *x*:

$f(x) = 3x - 5$

En este caso, la imagen de $x = 4$ es $f(4) = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$

La imagen de $x = -2$ es $f(-2) = 3 \cdot (-2) - 5 = -6 - 5 = -11$

Las funciones que vamos a utilizar van a ser **funciones reales de variable real.** Función real significa que las imágenes van a poder ser cualquier número real; de variable real quiere decir que el conjunto inicial, esto es, los valores que toma la variable independiente, van a ser números reales (más adelante veremos que a veces no se podrá calcular la imagen de cualquier número real)

**<u>OBSERVACIÓN</u>**

Cada valor de la variable independiente tiene una sola imagen, pero puede ocurrir que dos valores distintos de la variable independiente tengan la misma imagen.

Por ejemplo, para la función $y = x^2 - 4x + 5$ $\quad x = 1$ y $x = 3$ tienen la misma imagen:

$y(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$
$y(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

$x = 1$ tiene una sola imagen, que es 2, pero $x = 3$ tiene la misma imagen. Dos valores de *x* pueden tener la misma imagen, pero no al contrario: un valor de *x* no puede tener dos imágenes.

A continuación pasamos a estudiar una serie de características de una tunci6n, que aunque ya lo hemos hecho desde el punto de vista gráfico, vamos a ver ahora cómo hacerlo desde el punto de vista analítico

## 4.2. <u>DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN.</u>

Se llama **dominio** de una función al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente para que la variable dependiente tome un valor real. Lógicamente el dominio de una función es un subconjunto del conjunto inicial o bien todo él.

Para que una función quede perfectamente determinada es necesario conocer su dominio; sin embargo, es muy frecuente su omisión, en cuyo cayo se entiende que el dominio lo constituyen todos aquellos valores de *x* para los que son posibles las operaciones determinadas en la función.

Para determinar el dominio de una función basta con calcular los valores de la variable independiente para los que la dependiente toma un valor real.

***Ejemplo 2:***

Determinar el dominio de las funciones siguientes:

a) $y = x^2 + 1$
b) $y = \sqrt{x-1}$
c) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

a) Como puede observarse la variable independiente está sometida a las operaciones de potenciación y suma y como ambas admiten siempre solución la variable dependiente siempre tomará un valor real para cualquier valor que tome la variable independiente *x*, luego su dominio será todo el conjunto $\mathbb{R}$ : $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (\leftarrow, \rightarrow)$

b) Por tratarse de una raíz de índice par, para que su resultado sea un número real es necesario que el radicando sea siempre positivo o cero, ya que si es negativo el resultado no es un número real (la raíz cuadrada de un número negativo es un número complejo).
Luego el dominio de dicha función estaría formado por todos aquellos número que hacen que $x - 1 \geq 0$
Resolviendo la inecuación $x - 1 \geq 0$ obtenemos $x \geq 1$, luego el domino de dicha función estaría formado por todos los valores mayores o iguales que 1: $D = [1, +\infty) = [1, \rightarrow)$.
Para valores menores que 1, el radicando sería negativo y por tanto el resultado de la raíz no sería un número real.

El dominio de nuestra función se puede expresar de cualquiera las siguientes formas:

$1 \leq x < +\infty$ o $x \in [1, +\infty)$ o $D = [1, +\infty)$

Sabemos que la división únicamente carece de sentido cuando el divisor es igual a cero. Esto nos indica que dicha función tomará un valor real para cualquier valor que tome *x* excepto para aquellos que hacen que el denominador sea cero, es decir aquellos valores de x que hacen $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Luego, resolviendo dicha ecuación de segundo grado obtendremos los valores de *x* que hacen cero el polinomio y por lo tanto el denominador, con lo cual sabremos los valores de *x* que no forman parte de su dominio:

Resolviendo la ecuación obtenemos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

Por lo tanto 1 y 2 son los únicos valores que no forman parte del dominio de esta función, lo cual podemos expresar de la siguiente forma:

$$D = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty) \qquad \text{o} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

Se llama **recorrido** de una función al conjunto de las imágenes que resultan cuando sustituimos la variable independiente por cualquier valor.

Así, si nos fijamos en la función $y = 3x^4$, sea cual sea el valor que demos a la variable independiente, al sustituir en la función siempre nos va a dar un número positivo, ya que el exponente es par. Cuando sustituyamos la *x* por *0* la imagen será *0*, y en el resto de casos el resultado será siempre positivo (además, tan grande como queramos). Por tanto, el recorrido de esta función será el conjunto de todos los números positivos:

$$D = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty) = [0, \rightarrow)$$

***Ejercicio:***

¿Cuál será el recorrido de la función $y = E(x)$? ($E(x)$ es la parte entera de *x*)

Si nos fijamos en la gráfica de una función, el recorrido será la proyección de dicha gráfica sobre el eje vertical.

## 4.3. VALOR NUMÉRICO DE UNA FUNCIÓN

Llamamos valor numérico de una función al valor que toma la variable dependiente para un valor determinado de la variable independiente.

Es decir, dada una función cualquiera $y = f(x)$, su valor numérico para $x = a$, se obtiene sustituyendo en la función *x* por su valor *a*, obteniendo $y = f(a)$.

***Ejemplo 3:***

El valor numérico de la función $y = x - \dfrac{3}{x^2}$ para $x = 4$ se obtiene sustituyendo *x* por 4 en dicha función:

$$y(4) = 4 - \frac{3}{4^2} = 4 - \frac{3}{16} = \frac{61}{16}$$

## 4.4. FUNCIONES PARES E IMPARES.

### 4.4.1. Funciones pares

Decimos que una función es par cuando a valores opuestos de la variable independiente corresponden valores iguales de la variable dependiente.

$$\boxed{f \text{ es FUNCIÓN PAR} \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \ \forall x \in D(f)}$$

La función $f(x) = x^2$ es par ya que a valores opuestos de la variable independiente (por ejemplo $x = 2$ y $x = -2$), corresponden valores iguales de la variable dependiente:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 = 4$$
$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \left(-2\right)^2 = 4$$

Es decir $f(2) = f(-2)$

En general:

$$f(-x) = \left(-x\right)^2 = x^2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Lo que prueba que la función $f(x) = x^2$ es par.

### 4.4.2. Funciones impares

Decimos que una función es impar cuando a valores opuestos de la variable independiente corresponden valores opuestos de la variable dependiente.

$$\boxed{f \text{ es FUNCIÓN IMPAR} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \ \forall x \in D(f)}$$

La función $f(x) = x^3$ es impar ya que a valores opuestos de la variable independiente (por ejemplo $x = 2$ y $x = -2$), corresponden valores opuestos de la variable dependiente:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^3 = 8$$
$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \left(-2\right)^3 = -8$$

Es decir $f(-2) = -f(2)$

En general:

$$f(-x) = \left(-x\right)^3 = -x^3 = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Lo que prueba que la función $f(x)=x^3$ es impar.

**Ejemplo 4**

Determinar si la función $f(x)=x+x^5$ es par o impar.

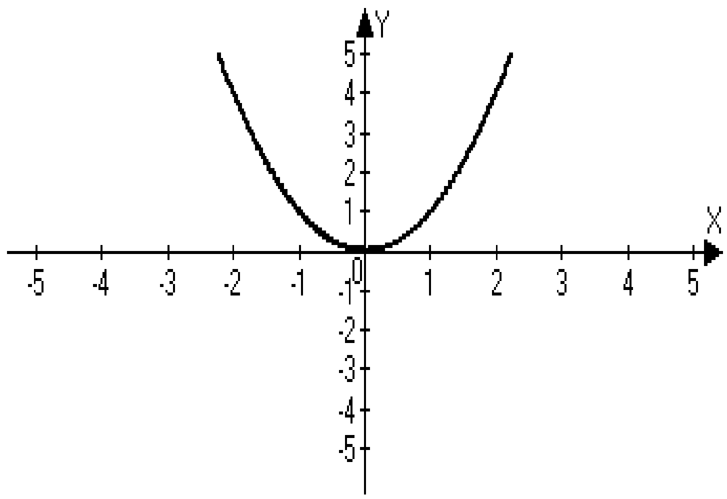
$$f(-x)=(-x)+(-x)^5=-x-x^5=-\left(x+x^5\right)=-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Luego es impar.

Las representaciones gráficas de las funciones pares e impares tienen unas características determinadas que permiten identificarlas como tales.

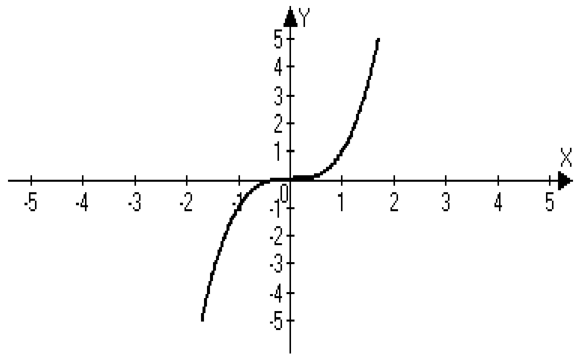
La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas:

$f(x)=x^2$




La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas:

$f(x)=x^3$



## 4.5. FUNCIÓN DE FUNCIÓN

En las funciones existen ocasiones en las que la variable independiente de una función es a su vez variable dependiente de otra función.

Consideremos las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$

Como podemos observar, en la función *g*, la variable independiente es *u*, que a su vez es variable dependiente en la función *f*.
Cuando ocurre esto podemos expresar de forma directa la dependencia que existe entre *x* e *y* sustituyendo en la función *f* la expresión de *u*:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(u) \\ u = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y = f\left[g(x)\right]$$

En estos casos decimos que la dependencia existente entre *x* e *y* es una **función de función**, siendo *u* una variable intermedia entre la variable independiente *x* y la variable dependiente *y*.

Podemos concluir diciendo que una función $y = f(x)$ es una **función de función** cuando es posible expresarla mediante una **variable intermedia.**

***Ejemplo 5:***

La función $y = \left(x-2\right)^3$ es una función de función ya que es posible expresarla mediante una variable intermedia:

$$\left.\begin{array}{r} y = u^3 \\ u = x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \left(x-2\right)^3$$

Igual ocurre con la función $y = 2^{3x}$ donde:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2^u \\ u = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2^{3x}$$

## 4.6. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Cuando aplicamos dos o más funciones de manera sucesiva, tenemos lo que se denomina una composición de funciones. Veámoslo con un ejemplo:

Si tenemos las funciones $f(x) = x-2$ y $g(x) = x^3$, la composición de $f$ y $g$ es otra función, notada por $g \circ f$, que se obtiene de la siguiente forma:

$$\left(g \circ f\right)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(x-2\right) = \left(x-2\right)^3$$

Asimismo, la composición de $g$ y $f$ es otra función, notada por $f \circ g$, que se obtiene de la siguiente forma:

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(x^3\right) = x^3 - 2$$

*Observaciones:*

- ✓ La composición de funciones no es conmutativa. Para darse cuenta de ello no hay más que observar el ejemplo anterior.
- ✓ La composición de funciones presenta una limitación en cuanto a los dominios y recorridos de las funciones que intervienen. Es necesario que el recorrido de *f* esté contenido en el dominio de *g* para poder realizar la composición $g \circ f$. De nos ser así el dominio de la composición deberá restringirse a donde sea posible realizarla.

***Ejercicio:***

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ y $h(x) = \dfrac{2}{x+1}$, calcula las siguientes composiciones:

a) $f \circ g$
b) $g \circ f$
c) $f \circ h$
d) $h \circ g$
e) $f \circ f$
f) $h \circ h$

## 4.7. FUNCIÓN INVERSA

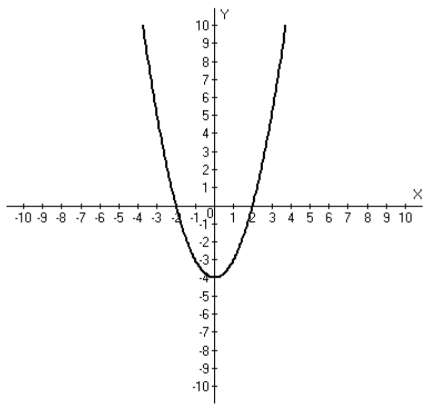
### 4.7.1. Idea intuitiva

Dada una función, sabemos que a cada valor de la variable independiente *x* le hacemos corresponder un valor de la variable dependiente *y*. Lo que nos planteamos ahora es si podemos realizar la operación inversa, esto es, al valor de la variable *y* asociarle el valor primitivo de la variable *x*; sería convertir la variable dependiente en independiente y viceversa.

Sabemos que una función verifica que cada elemento del dominio tiene una sola imagen; en cambio, puede ocurrir que dos valores distintos de la variable independiente tengan la misma imagen. Esto significa que vamos a tener problemas si queremos convertir la variable dependiente en independiente.

Por ejemplo, fijémonos en la función $f(x) = x^2 - 4$. Si hacemos una tabla podemos darnos cuenta que al ser una función cuadrática, van a existir valores distintos de *x* con la misma imagen:

| $x$ | $y = x^2 - 4$ |
|---|---|
| 0 | -4 |
| 2 | 0 |
| -2 | 0 |
| 0 | -3 |
| -1 | -3 |



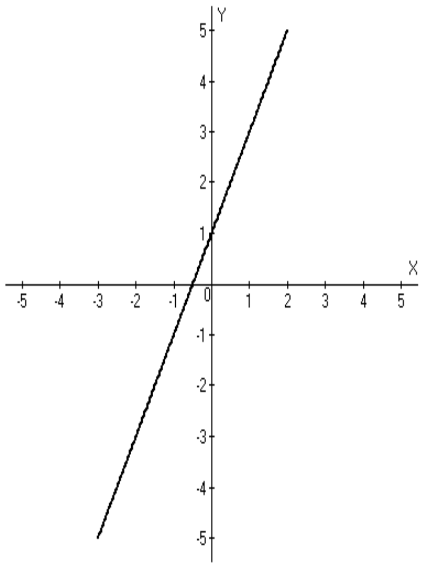

Luego, si ahora quisiéramos convertir la variable y en la variable independiente, tendríamos un problema: ¿cuál sería la imagen de 0: 2 o -2? ¿Y la de -3: 0 o -l?

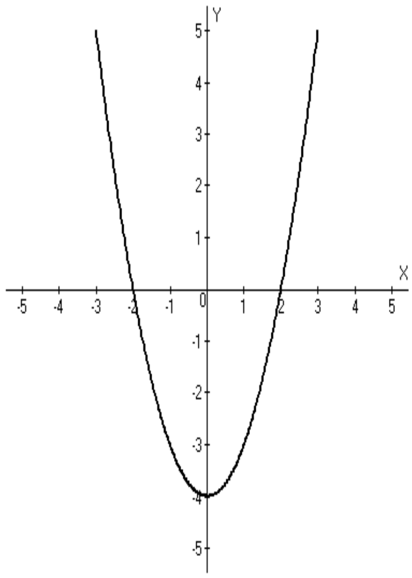
Por tanto, la condición necesaria para que una función sea inversible es que no haya imágenes repetidas, o lo que es lo mismo, que a valores distintos de x correspondan valores distintos de y (es lo que llamamos una función inyectiva). En este caso, sí podremos intercambiar x por y.

A la función que resulta se le denomina ***función inversa*** de la primera.

Asimismo, la función inversa de una función dada se puede definir como la función que al componerla con la función original nos hace regresar al punto de partida, es decir, si *f* es una función inversible, y su inversa es $f^{-1}$ entonces $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$

Gráficamente es muy sencillo darse cuenta si una función es o no inversible; por ejemplo, representemos las funciones $f(x) = 2x + 1$ e $f(x) = x^2 - 4$.




Para la primera función, trazando cualquier recta horizontal, sólo corta a la gráfica en un punto, mientras que para la segunda, hay veces en que la corta en dos lugares: esto significa que hay más de un punto con la misma imagen, y por lo tanto, no es una función inversible.

Una vez que sabemos que una función es inversible, el siguiente paso será calcular la expresión analítica de dicha función inversa.

Para funciones con expresiones analíticas sencillas, el proceso será, ya que intercambiamos las variables, despejar *x* en la función primera, y la nueva expresión que nos quede será la de su función inversa, pero volveremos a intercambiar los nombres, ya que usamos *x* para la variable dependiente e *y* para la independiente.

***Ejemplo:***

Para determinar la inversa de $f(x) = 2x + 1$ realizamos los siguientes pasos:

a. Llamamos *y* a $f(x)$
b. Despejamos la *x*:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

c. Intercambiamos *x* e *y*:

$$y = \frac{x-1}{2}$$

Como ya hemos dicho, la inversa de una función $f(x)$ se representa con el símbolo $f^{-1}(x)$.

Así, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

***Observaciones:***

- ✓ Es **<u>muy importante</u>** no confundir la notación $f^{-1}$ para la función inversa respecto de la composición, que es lo que estamos estudiando, con otros posibles significados del exponente *–1*.
- ✓ Para comprobar si una función inversa está bien calculada basta realizar las composiciones $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ y ver que da la función identida, es decir, que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$. En el ejemplo:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x-1}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x$$

### 4.7.2. Restricción de una función:

Para poder calcular la inversa de una función, cuando el problema sea que se repiten imágenes, lo que hacemos es quedarnos con una parte del dominio de la función primera, de manera que no haya valores distintos de *x* con la misma imagen. Es lo que se denomina **restringir una función,** y nos permitirá calcular la función inversa de la misma.

Así, si nos fijamos en la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$, podemos restringir a $\mathbb{R}^+$ y la función sería inversible, puesto que no se repiten imágenes. La expresión analítica de la función inversa sería:

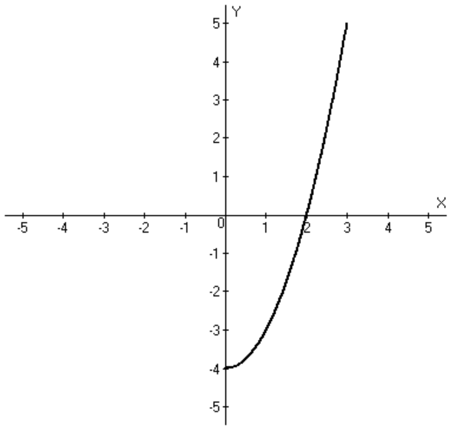
$$y = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = y + 4 \Rightarrow x = \sqrt{y+4}$$

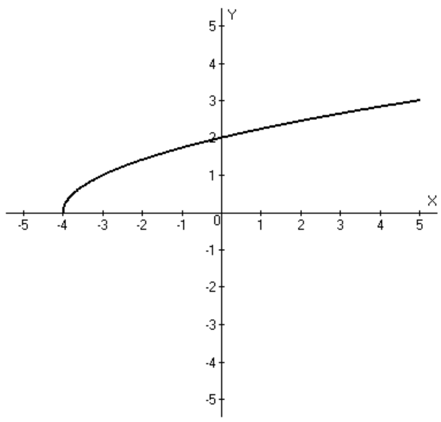
E, intercambiando variables, $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$

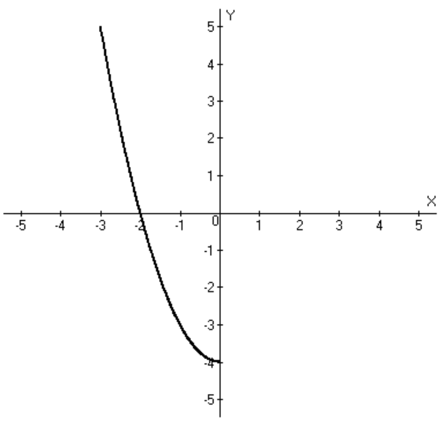
Nótese que también podríamos habernos restringido a $\mathbb{R}^-$; en este caso, la función inversa sería:

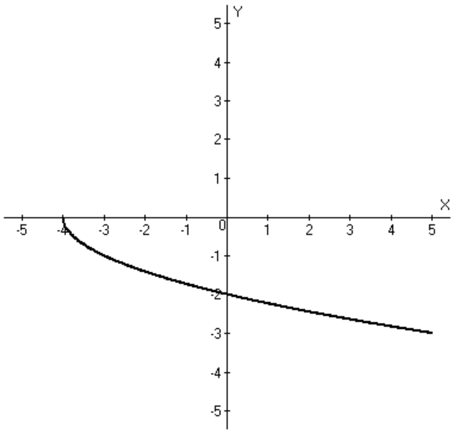
$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+4}$$

Compárense las diferencias entre las gráficas de las distintas funciones:




***Ejercicio:***

Estudia si son inversibles las siguientes funciones y calcula la función inversa, restringiendo si fuese necesario:

a) $f(x) = 3x - 4$
b) $f(x) = 2x^2 + 3$
c) $f(x) = \dfrac{x-5}{2x+1}$

## 4.8. ALGUNAS FUNCIONES INTERESANTES

### 4.8.1. FUNCIONES POLINÓMICAS

Funciones polinómicas son aquellas en las que la variable independiente no figura bajo signo radical ni como denominador, con lo cual el segundo miembro de la igualdad $y = f(x)$ es un polinomio.

Son polinómicas las siguientes funciones:

$f(x) = 2x - 4$ $\qquad f(x) = 5$ $\qquad f(x) = x^2 - 2x + 3$

$f(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 1$ $\qquad$ $f(x) = x^2 + \sqrt{3}$

No son polinómicas las siguientes funciones:

$f(x) = \frac{7}{x}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x+2}$

Las funciones polinómicas se pueden clasificar, atendiendo a su grado, en:

- Funciones de grado cero o funciones constantes. Ejemplo: $f(x) = 3$
- Funciones de primer grado o lineales. Ejemplo: $f(x) = x + 3$
- Funciones de segundo grado o cuadráticas. Ejemplo: $f(x) = x^2 + 2$
- Funciones de tercer grado o cúbicas. Ejemplo: $f(x) = 3x^3 - x + 3$
- Funciones de cuarto grado.
- Etc...

Vamos a realizar el estudio de algunas funciones polinómicas obviando las de primer grado puesto que ya lo hicimos en el curso anterior.

### 4.8.1.1. La función cuadrática.

Ya sabes, por cursos anteriores que la función cuadrática es una función polinómica de segundo grado, y que responde a la expresión:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

También debes saber que su representación gráfica es una curva denominada **parábola**.

Para representar gráficamente una función cuadrática se puede seguir el procedimiento general de representaciones gráficas de funciones, es decir dar valores a la variable independiente y calcular los que corresponde ala variable dependiente para después trasladarlos a unos ejes de coordenadas.

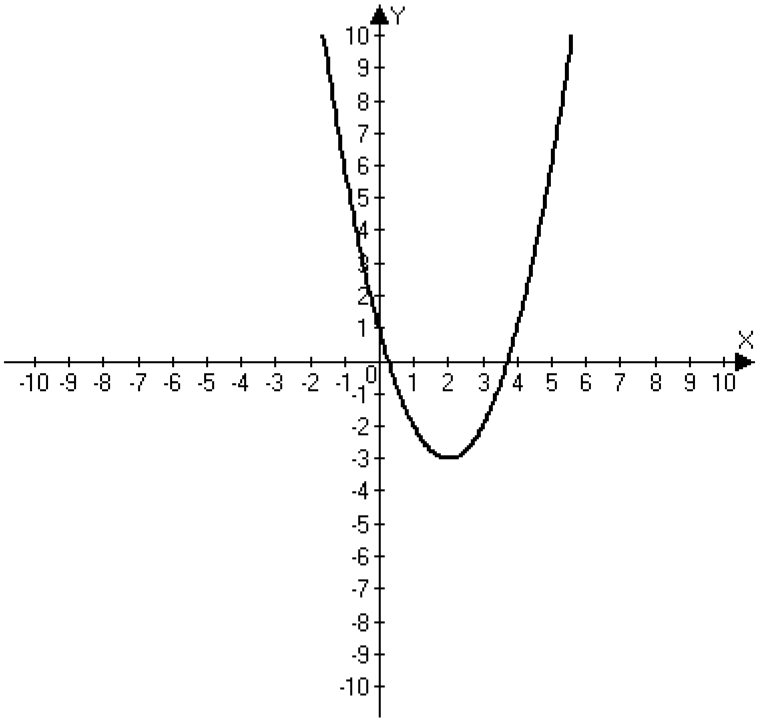
***Ejemplo 6:***

Vamos a representar gráficamente la función $y = x^2 - 4x + 1$

Para ello construimos una tabla de valores:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | ... | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| $y$ | ... | 6 | 1 | -2 | -3 | -2 | 1 | 6 | ... |

Representamos los puntos obtenidos en una gráfica y obtenemos:




Nosotros vamos a intentar hacer más cómoda y fácil la representación gráfica de la parábola, como ya hicimos con recta en cursos anteriores, a partir del estudio de su gráfica y de su expresión algebraica.

Si recordamos el caso de la recta veremos que la ordenada en el origen nos informaba del punto de corte de la recta con el de ordenadas. Podemos comprobar que en el caso de la parábola, su término independiente coincide con el punto donde la parábola corta al eje de ordenadas. En nuestro caso corta en el punto (0,1).

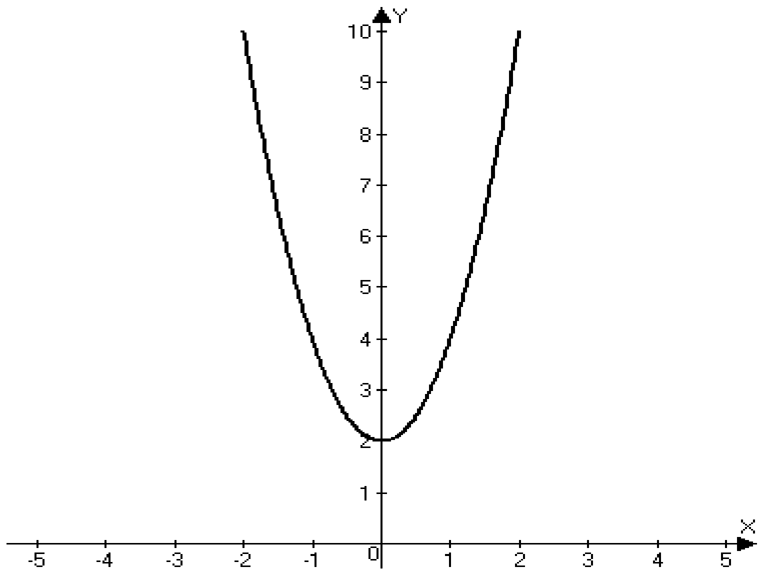
Esta comprobación nos permite obtener información inmediata de un punto importante por donde pasa la parábola [punto (0,c)].

Por otro lado, a poco que representemos varias funciones cuadráticas, podremos comprobar qué influencia tiene en la gráfica el coeficiente del término de segundo grado (a).

Para ello vamos a representar otra función cuadrática cuyo coeficiente (a) sea distinto al anterior:

$$y = 2x^2 + 2$$

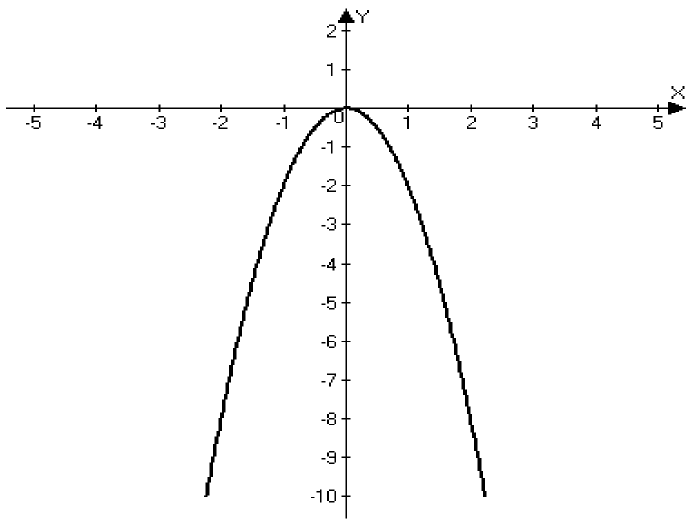
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| $y$ | ... | 10 | 4 | 2 | 4 | 10 | 20 | ... |




Como podemos observar esta parábola está mucho más cerrada que la anterior. Esta característica depende del valor absoluto del coeficiente del término de grado dos: mientras mayor sea el valor absoluto de dicho término, más cerrada será la parábola, ya que el crecimiento es más rápido.

Del mismo modo se puede observar qué ocurre cuando el coeficiente del término de segundo grado es un número negativo. Veámoslo para la función $y = -2x^2$ :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| $y$ | ... | -8 | -2 | 0 | -2 | -8 | -18 | ... |

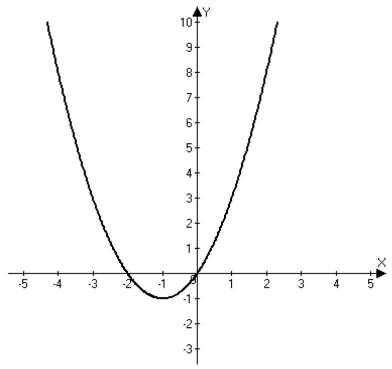



Como podemos ver el hecho de que el coeficiente del término de segundo grado sea negativo hace que la parábola aparezca invertida. (Relaciona esto con lo que ocurría en la recta cuando la pendiente era positiva o negativa)

#### 4.8.1.1.1. Algunas consideraciones acerca de la función cuadrática.

- ✓ Si el término independiente es cero ($c=0$), la función cuadrática toma la forma $y=ax^2+bx$, cuya gráfica es una parábola que pasa por el origen de coordenadas.
  Ejemplo: $y=x^2+2x$

| $x$ | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ... | -8 | -2 | 0 | -2 | -8 | -18 | ... |




- ✓ Si el coeficiente del término del primer grado es cero ($b=0$) la función cuadrática toma la forma $y=ax^2+c$ cuya representación gráfica es una parábola simétrica respecto del eje de ordenadas. (Puedes comprobarlo en la gráfica anterior de la función $y=2x^2+2$)
- ✓ Si tanto b como c son nulos ($b=c=0$), la función cuadrática toma la forma $y=ax^2$ cuya representación gráfica es una parábola que pasa por el origen de coordenadas y es simétrica respecto del eje de ordenadas. (Puedes comprobarlo con la anterior gráfica de la función $y=2x^2$)

#### 4.8.1.1.2. Determinación del vértice de una parábola.

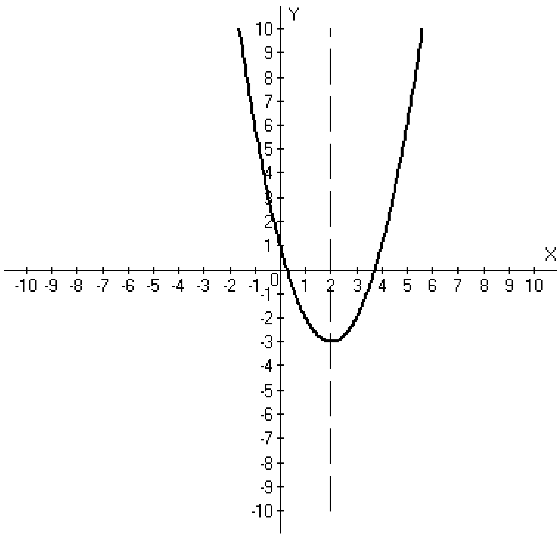
Si te has fijado en las diferentes parábolas que hemos representado hasta ahora, habrás podido comprobar que en todas ellas existe un punto bastante interesante y cuyo conocimiento es importante. Este punto es el que está más abajo de la parábola en el caso en que *a* es positivo, y el más alto en el caso en el que *a* es negativo. A este punto se le denomina **vértice** de la parábola, y en la tabla de valores coincide con el mayor o el menor valor que toma la variable dependiente (*y*), según que $a>0$ o $a<0$.

En las parábolas representadas anteriormente estos puntos serían:

$$y=x^2-4x+1 \qquad A(2,-3)$$
$$y=2x^2+2 \qquad B(0,2)$$
$$y=-2x^2 \qquad C(0,0)$$

$$y = x^2 + 2x \qquad\qquad D(-1,-1)$$

Se puede comprobar, a poco que nos fijemos, que las parábolas son simétricas respecto de la recta vertical que pasa por el vértice:




Las coordenadas del vértice vienen dadas por la expresión: $V\left(\frac{-b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$, siendo $\frac{-b}{2a}$ la coordenada en el eje de abscisas del vértice y $c-\frac{b^2}{4a}$ la coordenada en el eje de ordenadas del vértice.

Veámoslo:

La coordenada en el eje de abscisas del vértice de una parábola se encuentra a la misma distancia de los dos puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas; por tanto, es el punto medio de las dos soluciones de la ecuación de segundo grado asociada a la parábola.

Si la ecuación de la parábola es $y = ax^2 + bx + c$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Determinemos su punto medio:

$$m = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}.$$

Una vez conocida la coordenada en el eje de abscisas (*X*), la otra coordenada se puede calcular fácilmente sustituyendo ésta en la ecuación de la función cuadrática.

***<u>Ejemplo 7</u>***

Determinar las coordenadas del vértice de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 7$.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$$

La otra coordenada la puedo conseguir aplicando la expresión dada anteriormente o bien sustituyendo en la propia función. Así es como lo vamos a hacer:

$$y\left(\frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 7 = 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 7 =$$
$$= \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 7 = \frac{25 - 50 + 56}{8} = \frac{31}{8}$$

Luego las coordenadas del vértice serían $V\left(\frac{5}{4}, \frac{31}{8}\right)$

## 4.8.2. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Denominamos función exponencial a toda función de la forma:

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

siendo $a > 0$. Por ejemplo son funciones exponenciales:

$f(x) = 3^x$ $\qquad$ $f(x) = e^x$ $\qquad$ $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

### 4.8.2.1. Algunas características de la función exponencial.

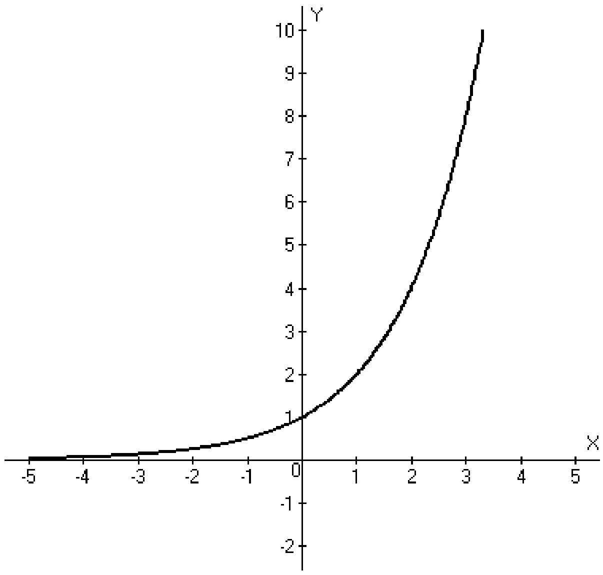
A poco que estudiemos la función exponencial podemos deducir lo siguiente:

- ✓ Para $x = 0$, la función toma el valor $y = 1$, lo cual quiere decir que su gráfica pasa por el punto $(0,1)$
- ✓ Para $x = 1$, la función toma el valor $y = a$, es decir, su gráfica pasa por el punto $(1, a)$
- ✓ Los valores que toma la función exponencial para cualquier valor real de la variable independiente son siempre positivos.
- ✓ Si la base es mayor que la unidad ($a > 1$) la función exponencial es monótona creciente, es decir la función crece constantemente al crecer la variable independiente.
- ✓ Si la base es menor que la unidad ($a < 1$) la función exponencial es monótona decreciente, es decir la función decrece constantemente al crecer la variable independiente.

La gráfica de la función exponencial es de la siguiente forma, en el caso en que $a > 1$:

Hagamos la gráfica de $y = 2^x$

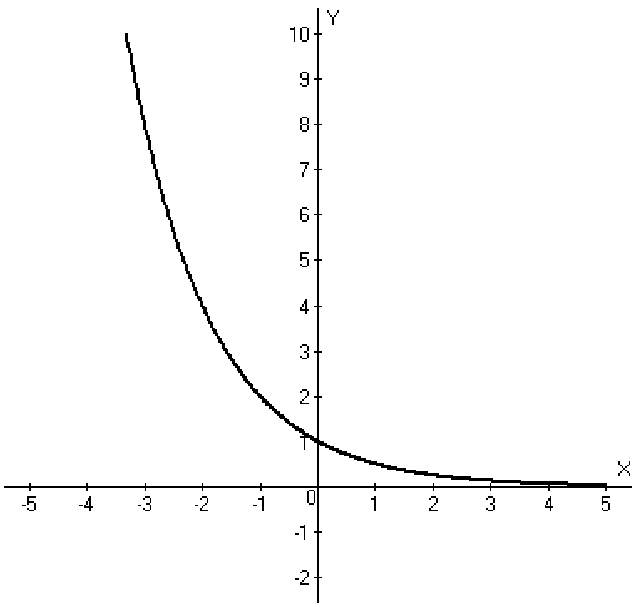
| $x$ | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ... | $1/4$ | $1/2$ | 1 | 2 | 4 | 8 | ... |




Si la base es menor que uno ($a < 1$):

Por ejemplo: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

| $x$ | ... | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ... | 8 | 4 | 2 | 1 | $1/2$ | $1/4$ | $1/8$ | ... |




Como podemos apreciar los valores que toma la variable dependiente son siempre positivos, con lo cual la gráfica esta en el primer y segundo cuadrantes y siempre pasa por los puntos $(0,1)$ y $(1,a)$.

### 4.8.3. LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, siendo de la forma:

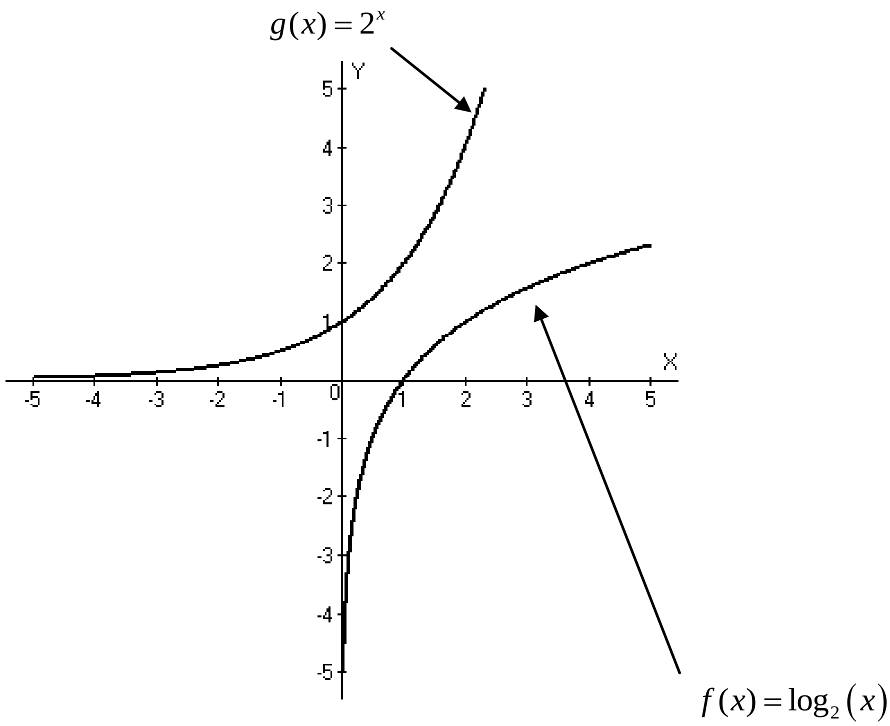
$$\boxed{f(x) = \log_a(x)}$$

#### 4.8.3.1. Algunas características de la función logarítmica.

- ✓ Para $x = 1$, cualquiera que sea la base (*a*), la función toma el valor $y = 0$.
- ✓ Para $x = a$, siendo a la base, la función toma el valor $y = 1$.
- ✓ Para $x = a^m$ siendo a la base, la función toma el valor $y = m$
- ✓ Para $x < 0$, la función no existe dentro del campo de los números reales.
- ✓ Para $x = 0$ la función no existe.
- ✓ Si la base es mayor que la unidad ($a > 1$), para $x > 1$, la función toma valores positivos y para $x < 1$, la función toma valores negativos.
- ✓ Si la base es menor que la unidad ($a < 1$), para $x > 1$, la función toma valores negativos y para $x < 1$, la función toma valores positivos.

La gráfica de una función logarítmica es de la siguiente forma en caso de que la base sea mayor que la unidad ($a > 1$):

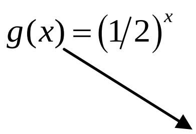
Veámoslo con $f(x) = \log_2(x)$ y $g(x) = 2^x$

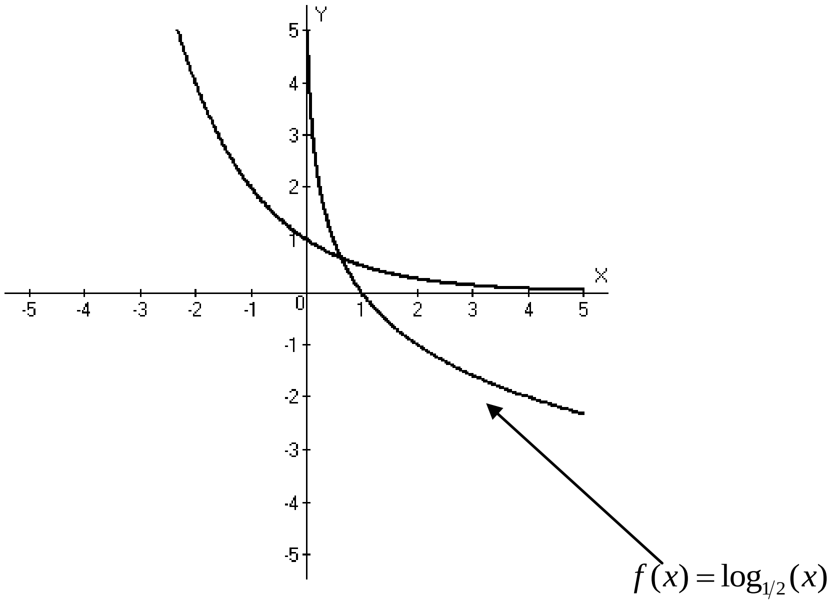



Como podemos comprobar las gráficas de estas dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Además podemos ver que pasa por los puntos (1,0), $(a,1)$, $(a^2,2)$, $(a^3,3)$ y, en general, $(a^m,m)$

La gráfica es una curva constantemente creciente.

Si la base es menor que la unidad ( $a<1$ )






### 4.8.4. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Funciones trigonométricas son aquellas en las que la variable independiente se encuentra afectada por alguna razón trigonométrica.

Podemos afirmar, de forma general que las funciones trigonométricas son periódicas, es decir, que sus valores se repiten periódicamente, por lo que para realizar su estudio es suficiente con considerar un periodo y hacer extensible a todos los demás lo que en este sucede.

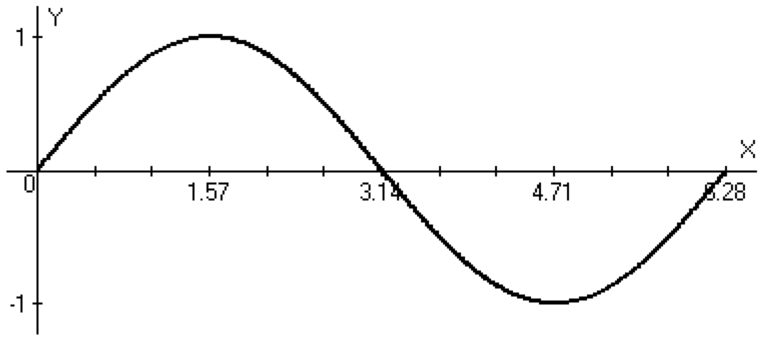
Las funciones trigonométricas más importantes son aquellas que se corresponden con las razones trigonométricas fundamentales como son:

$$f(x)=\operatorname{sen}(x) \qquad f(x)=\cos(x) \qquad f(x)=\operatorname{tg}(x)$$

#### 4.8.4.1. La función seno.

La función seno es una función periódica, de periodo $2\pi$ radianes o 360º. Recuerda que $\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen}(x+360^{\circ})=\operatorname{sen}(x)$.

Debido a esto su estudio lo podemos reducir al intervalo $[0,2\pi]$. Vamos dando valores a la variable independiente y obtenemos los de la variable dependiente, que posteriormente pasados a unos ejes de coordenadas nos resulta:



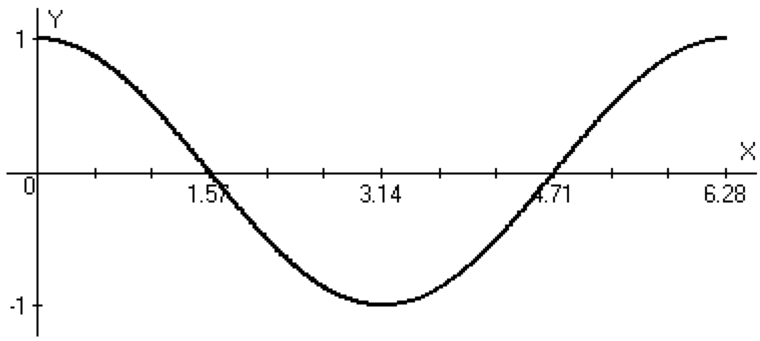

Analizando las variaciones que experimenta el seno a medida que el ángulo toma los distintos valores del intervalo $\left[0, 2\pi\right]$ radianes, podemos observar lo siguiente:

- ✓ Cuando el ángulo es cero el valor de la función es cero $\operatorname{sen}\left(0^{o}\right) = 0$
- ✓ A medida que el valor del ángulo aumenta hasta $\frac{\pi}{2}$ radianes (90º), la función toma valores positivos aumentando desde cero hasta uno, que como ya sabes es el valor más alto posible que puede tomar el seno de un ángulo.
- ✓ Cuando el valor del ángulo aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a $\pi$ radianes, los valores que toma la función seno son positivos pero van disminuyendo su valor hasta llegar a cero.
- ✓ Entre $\pi$ y $\frac{3\pi}{2}$ radianes los valores que toma la función son negativos y disminuyen hasta alcanzar el valor -1, que como ya sabes es el menor valor que puede tomar el seno de un ángulo.
- ✓ Entre $\frac{3\pi}{2}$ y $2\pi$ radianes los valores tomados por la función son negativos pero van aumentando hasta alcanzar el cero.

#### 4.8.4.2.La función coseno.

La función coseno, al igual que la anterior, es una función periódica de periodo $2\pi$, ya que $\cos(x+2\pi) = \cos(x+360^{o}) = \cos(x)$

Vamos a proceder igual que en la función seno:

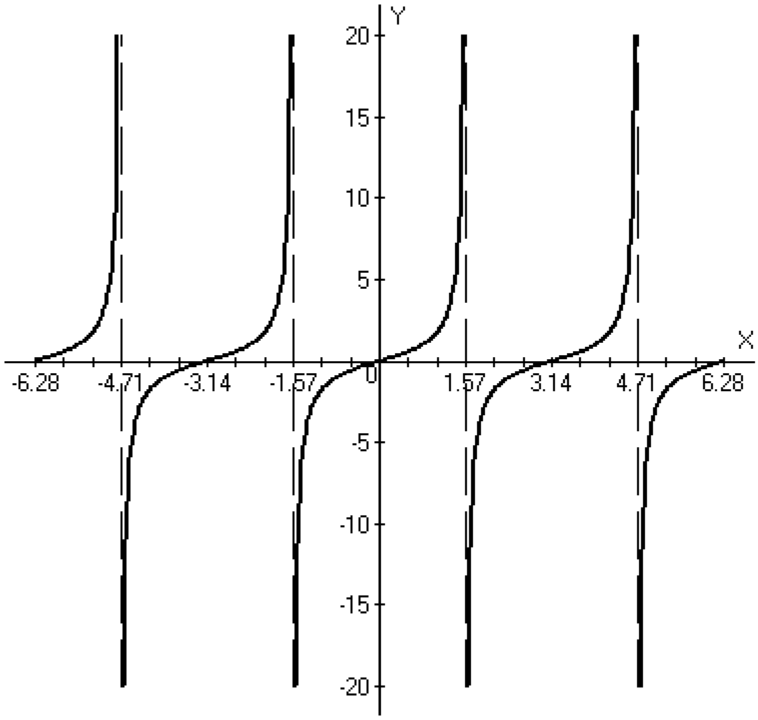



- ✓ Cuando el ángulo vale cero la función toma el valor 1 ($\cos(0º)=1$)
- ✓ Entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$ los valores de la función son positivos y van disminuyendo hasta alcanzar el valor cero.
- ✓ Entre $\dfrac{\pi}{2}$ y $\pi$ los valores de la función son negativos y van disminuyendo hasta alcanzar el valor mínimo que puede tomar el coseno que es –1.
- ✓ Entre $\pi$ y $\dfrac{3\pi}{2}$ los valores de la función son negativos pero van aumentando hasta alcanzar de nuevo el valor cero.
- ✓ Entre $\dfrac{3\pi}{2}$ y $2\pi$ los valores de la función son positivos y van aumentando hasta alcanzar el máximo valor que puede tomar el coseno de un ángulo que es 1.

### 4.8.4.3.La función tangente.

La función tangente es una función periódica de periodo $\pi$ radianes, ya que como recordarás $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}(x+180º)=\operatorname{tg}(x)$ .

Debido a esto su estudio lo podemos realizar para un intervalo de $\pi$ radianes. El intervalo que vamos a estudiar es el $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ radianes.




Como se puede observar la función toma valores muy grandes y muy pequeños. Fíjate en los valores que toma la función tangente cuando nos acercamos a 90º o a 270º. ¿Recuerdas lo que ocurría cuando se le preguntaba a la calculadora por la tg(90º)?

Puedes relacionar todo lo que hemos contado en este epígrafe de funciones trigonométricas con lo que conoces de la circunferencia goniométrica; ello te servirá para afianzar los contenidos y conceptos y comprenderlos mejor.

### 4.8.5. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

#### 4.8.5.1. Definición

Las funciones que hemos estudiado hasta ahora se caracterizan por quedar definidas únicamente por una sola expresión; pero si pensamos un poco, nos damos cuenta que hay muchos fenómenos que no se rigen por una sola ley, sino que, por ejemplo, dependiendo del tiempo, ésta puede cambiar.

Pensemos si no en el siguiente caso:

Un móvil parte del estado de reposo con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con una aceleración de 2 m/s$^2$ pero a los 5 segundos estabiliza su velocidad, que a partir de entonces se mantiene constante (movimiento uniforme).

Supongamos que queremos representar gráficamente la relación entre el tiempo empleado y el espacio transcurrido. Puesto que el móvil presenta dos tipos de movimiento, tendremos dos tipos de representación, uno para cada tramo:

- ✓ De 0 a 5 s el movimiento es uniformemente acelerado con $v_0 = 0 \quad m/s$ y $a = 2 \quad m/s^2$. Por tanto, la expresión del espacio en función del tiempo será:

$$e = \frac{1}{2}\cdot 2t^2 = t^2$$

- ✓ De los 5 s en adelante el movimiento es uniforme. La velocidad inicial será la velocidad final del anterior movimiento (a los 5 s): $v = v_0 + at = 0 + 2t = 2t$, que, en el instante $t = 5$ vale $v = 2t = 2\cdot 5 = 10 \quad m/s$.

  Además, hay un espacio recorrido de $e(5) = 5^2 = 25 \quad m$

  Como la velocidad es constante, la expresión del espacio en función del tiempo para este segundo tramo será:

$$e = e_0 + vt = 25 + 10\left(t-5\right) = 10t - 25$$

  (ponemos $t-5$ porque este es un nuevo movimiento y es como si el tiempo que le corresponde empezara en 0)

Por tanto, la función que representa la relación entre el espacio y el tiempo para este móvil consta de dos expresiones, una para el tramo de 0 a 5 s y otra para el tramo de 5 en adelante.

De manera que podemos escribir que la función que representa la dependencia del espacio con respecto al tiempo es:

$$e(t) = \begin{cases} t^2 & si \quad t \in \left[0,5\right] \\ 10t - 25 & si \quad t \in \left(5,+\infty\right) \end{cases}$$

Esto es un ejemplo de función definida a trozos. Una función de este tipo no es más que una función que en vez de tomar una única expresión para expresar la relación entre las dos variables, toma varias expresiones en determinados tramos del dominio.

**Observación:**

Puesto que estamos hablando de una sola función, cada elemento del dominio sólo puede tener una imagen; por consiguiente, para un valor x de la variable independiente sólo puede hallarse su imagen en uno de los tramos, es decir, los intervalos en que está definido cada tramo no tienen valores de *x* en común.

***Ejemplos:***

a) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<-1 \\ x^2-4 & si \quad x\geq -1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 5 & si \quad x\in[-2,1] \\ x+3 & si \quad x\in(1,4] \end{cases}$

**4.8.5.2. Dominio**

Para calcular el dominio de una función definida a trozos tenemos que tener en cuenta dos elementos:

- ✓ los intervalos de definición dados para cada tramo.
- ✓ las consideraciones estudiadas para cada tipo de función (polinómicas, racionales,...)

Veámoslo para los tres ejemplos anteriores:

1) $e(t)=\begin{cases} t^2 & si \quad t\in[0,5] \\ 10t-25 & si \quad t\in(5,+\infty) \end{cases}$

En el primer tramo, $[0,5]$, la función es $e(t)=t^2$; como es polinómica no hay ningún punto de no existencia de imagen, luego no hay que eliminar ningún elemento de ese intervalo.
En el 2º tramo, $(5,+\infty)$, la función es $e(t)=10t-25$, que también es polinómica, con lo que tampoco eliminamos ningún elemento.

Por tanto, el dominio será la unión de los dos intervalos anteriores:

$$D(e)=[0,5]\cup(5,+\infty)=[0,+\infty)$$

2) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<-1 \\ x^2-4 & si \quad x\geq -1 \end{cases}$

Cada uno de los tramos también viene definido por funciones polinómicas; por tanto no tenemos más que unir los dos intervalos para tener el dominio:

$$D(f)=(-\infty,-1)\cup[-1,+\infty)=\mathbb{R}$$

3) $g(x)=\begin{cases} 5 & si \quad x\in[-2,1] \\ x+3 & si \quad x\in(1,4] \end{cases}$

El razonamiento es el mismo por ser funciones polinómicas.

$$D(g)=[-2,1]\cup(1,4]=[-2,4]$$

Calcula el dominio de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<4 \\ \dfrac{1}{x-5} & si \quad x\in[4,10) \end{cases}$$

### 4.8.5.3. Representación gráfica

Para llevarla a cabo lo único a tener en cuenta es que cada tramo se dibuja únicamente para el intervalo para el que está definido. Cuando trazar cada tramo sea sencillo, podemos dibujar completa la gráfica de la función de dicho intervalo y después borrar la parte que no está definida para esa expresión.

Observación: **¡Cuidado con la representación en los puntos frontera!**

Representamos los 3 ejemplos anteriores:

1) $e(t)=\begin{cases} t^2 & si \quad t\in[0,5] \\ 10t-25 & si \quad t\in(5,+\infty) \end{cases}$

En el primer tramo la función es $e(t)=t^2$. La representamos completa:

Vértice $V(0,0)$

Este es también el único punto de corte con los ejes con lo que para terminar de representarla construimos una tabla de valores:

| t | e |
|---|---|
| -5 | 25 |
| -2 | 4 |
| -1 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 5 | 25 |

Dibujamos la gráfica y nos quedamos con el tramo de 0 a 5, $[0,5]$.

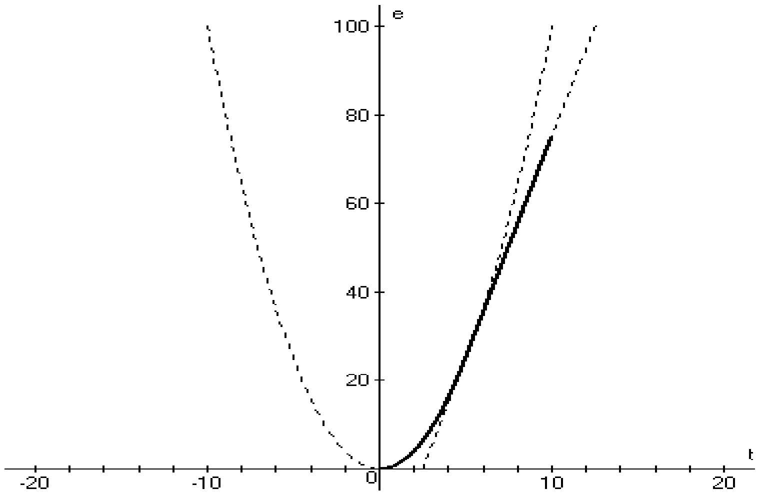
En el segundo tramo la función es $e(t)=10t-25$.

Como es una recta basta construir una tabla de valores:

| t | e |
|---|---|
| 5 | 25 |
| 5 | 35 |

Dibujamos la gráfica en los mismos ejes (es la misma función) y nos quedamos con el tramo que le corresponde, $\left(5,+\infty\right)$

Luego su representación gráfica es:




***Observación:***

A la hora de representar una función definida a trozos, siempre tomaremos los puntos frontera para hallarles las imágenes para saber exactamente donde acaba o empieza cada tramo.

2) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<-1 \\ x^2-4 & si \quad x\geq -1 \end{cases}$

Procediendo análogamente:

Primer tramo:

$f(x)=2x-3$. Para representarla calculamos una tabla de valores:

| *x* | *f(x)* |
|---|---|
| -4 | -11 |
| -1 | -5 |

(Tomamos $x=-1$ por ser valor frontera)

Segundo tramo:

$f(x)=x^2-4$

Vértice $V\left(0,-4\right)$

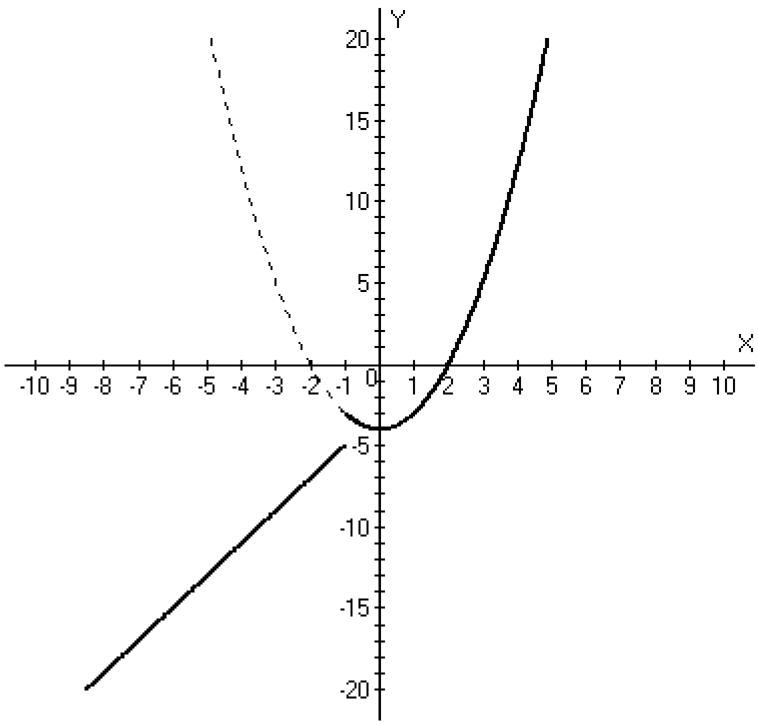
Puntos de corte con los ejes *(-2,0), (2,0), (0,-4)*

Tomamos algunos valores más:

| *x* | *f(x)* |
|---|---|
| -3 | 5 |
| -1 | -3 |
| 1 | -3 |
| 3 | 5 |

(Tomamos $x=-1$ por ser valor frontera)

La representación es:




3) $g(x)=\begin{cases} 5 & si \quad x\in[-2,1] \\ x+3 & si \quad x\in(1,4] \end{cases}$

Primer tramo:

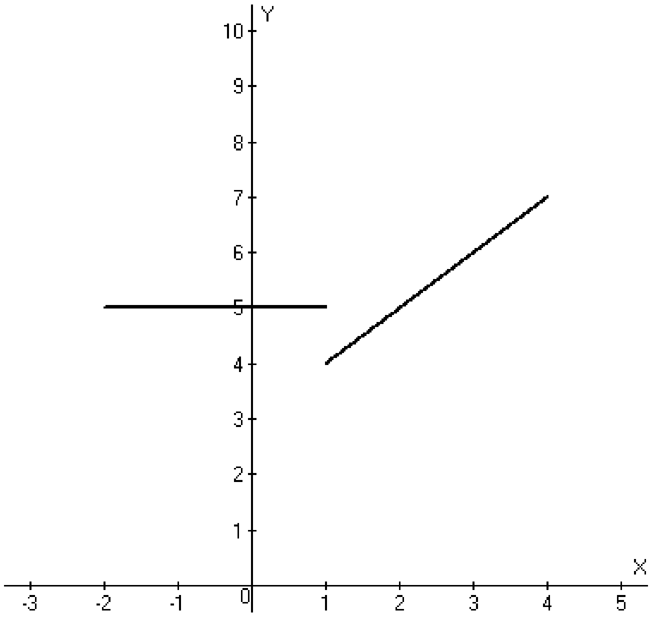
$g(x)=5$ es una función constante. Su representación es una recta paralela a *OX* por (0,5).

$g(x)=x+3$ es una función afín. Su representación es una recta que hallamos dando valores:

| *x* | *g(x)* |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 5 |
| 4 | 7 |

(Nótese que tomamos tanto $x=1$ como $x=4$)

La representación gráfica es:




***Observación:***

Aunque sabemos que un valor de x tiene una sola imagen, al confeccionar las tablas tomamos siempre los puntos frontera en los dos tramos para saber hasta donde llega la gráfica en cada uno de ellos, de manera que en el intervalo al que no pertenezca lo representaremos con un circulo para indicar que ese punto no pertenece a la gráfica, sino sólo el correspondiente a su verdadero tramo.

### 4.8.6. FUNCIONES DE VALOR ABSOLUTO

Vamos a estudiar un tipo especial de funciones definidas a trozos que se denominan funciones de valor absoluto; reciben este nombre porque la imagen de cada valor de x la vamos a calcular hallando el valor absoluto de un cierto número.

Como sabemos, el valor absoluto de un número es ese mismo número si este es positivo, y su opuesto si el número es negativo (pasa a ser positivo). El valor absoluto de un número se representa escribiendo dicho número entre barras:

$|3| = 3$ $\qquad |-5| = -(-5) = 5$ $\qquad |0| = 0$ $\qquad |-7'3| = -(-7'3) = 7'3$

Pues ahora lo que vamos a calcular es el valor absoluto de una función. ¿Qué quiere esto decir? Pues que vamos a calcular la imagen de un valor de *x*, y si dicha imagen es positiva la vamos a dejar tal como está, pero si la imagen nos da negativa le vamos a cambiar el signo (se convierte en positiva); es decir, vamos a calcular el valor absoluto de la imagen de la función.

Por lo tanto, cuando tengamos una función de este tipo hemos de tener en cuenta dos cosas:

- ✓ Que para unos valores de *x* su imagen, *f(x)*,se va a quedar tal como está (aquellos para los que *f (x)* es positiva) y que para otros valores de *x*, su imagen va a ser *-f(x)* (aquellos para los que *f(x)* es negativa, para que quede positiva).
- ✓ Que tendremos que calcular para qué valores dejamos la imagen igual y para cuáles se la cambiamos.

***Observación:***

**Hay que comprobar si f(x) es positiva o negativo, no que signo tiene x. Lo que miramos es el signo de las imágenes, no el de la variable independiente.**

***Ejemplo l:***

$f(x)=|2x+6|$

Esta función es el valor absoluto de $f(x)=2x+6$; esto quiere decir que si al calcular la imagen $2x+6$ queda positivo o cero, dejaremos la misma imagen, pero cuando queda negativo cambiaremos el signo.

Por ejemplo:

Si $x=5$, $f(5)=|2\cdot 5+6|=|10+6|=|16|=16$ (dejamos el mismo signo porque la imagen, 16, es positiva.)

Si $x=-1$, $f(-1)=|2\cdot(-1)+6|=|-2+6|=|4|=4$ (dejamos el mismo signo porque la imagen, 4, es positiva.)

Si $x=-7$, $f(-7)=|2\cdot(-7)+6|=|-14+6|=|-8|=8$ (cambiamos el signo a la imagen porque dicha imagen, -8, es negativa.)

Es decir: Si al sustituir *x* por un número resulta que *2x+6* es positivo o cero, la imagen continua siendo *2x+6*. En cambio, si al sustituir x por un número resulta que *2x+6* es negativo, la imagen será *-(2x+6)*.

**Observación:**

En el último caso *-(2x+6)* es un número positivo.

Apoyándonos en todo lo anterior, podemos escribir que la función valor absoluto es:

$$f(x)=|2x+6|=\begin{cases} 2x+6 & si \quad 2x+6\geq 0 \\ -2x-6 & si \quad 2x+6<0 \end{cases}$$

Por tanto esta función queda definida a trozos, y su representación gráfica se hará como ya hemos estudiado.

Lo que nos queda por concretar son los intervalos de existencia de cada rama:

Para ello resolveremos las inecuaciones que nos aparecen:

$$2x+6\geq 0 \Rightarrow 2x\geq -6 \Rightarrow x\geq -3$$

$$2x+6< 0 \Rightarrow 2x< -6 \Rightarrow x< -3$$

Así que la función ya está completamente definida:

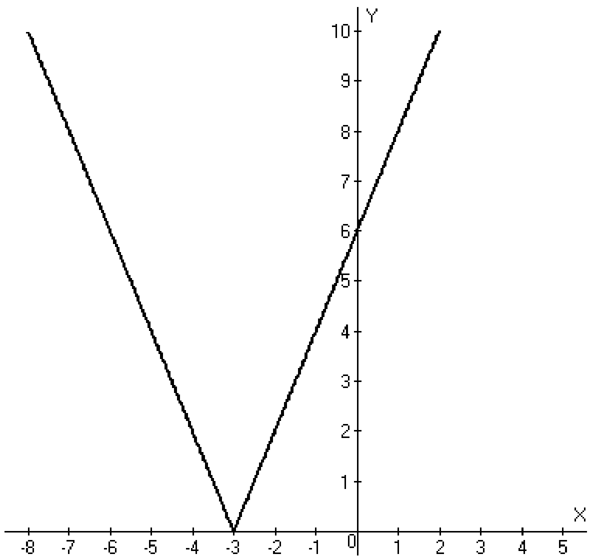
$$f(x)=|2x+6|=\begin{cases} 2x+6 & si \quad x\geq -3 \\ -2x-6 & si \quad x< -3 \end{cases}$$

Como cada tramo es un trozo de recta, para representarlo basta darle valores (no olvidamos tomar el punto frontera para saber hasta donde llega cada tramo):

| *x* | *y=2x+6* |
|---|---|
| -3 | 0 |
| 1 | 8 |
| 2 | 10 |

| *x* | *y=-2x-6* |
|---|---|
| -3 | 0 |
| -4 | 2 |
| -5 | 4 |

Con lo que su gráfica es:




**Obsérvese que la gráfica queda por encima del eje de abscisas. ¿A qué es debido?**

Vamos a proceder análogamente para realizar los siguientes ejemplos:

***Ejemplo 2:***

$f(x) = |x+9|$

Esta función queda definida en las siguientes ramas:

$$f(x) = |x+9| = \begin{cases} x+9 & si \quad x+9 \geq 0 \\ -x-9 & si \quad x+9 < 0 \end{cases}$$

Resolviendo las inecuaciones:

$x+9 \geq 0 \Rightarrow x \geq -9$

$x+9 < 0 \Rightarrow x < -9$

Y, por tanto, la función queda así:

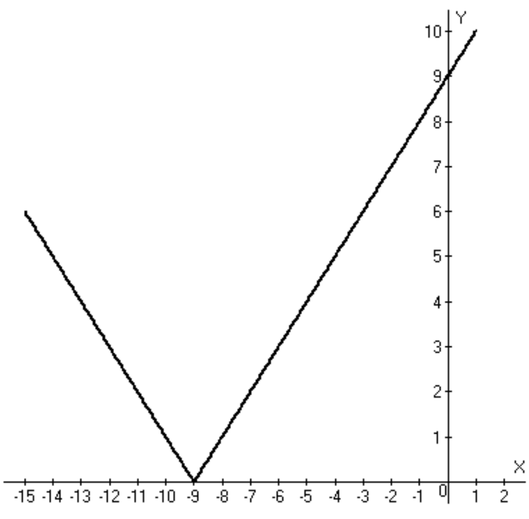
$$f(x) = |x+9| = \begin{cases} x+9 & si \quad x \geq -9 \\ -x-9 & si \quad x < -9 \end{cases}$$

Representamos cada tramo de recta:

| *x* | *y = x + 9* |
|---|---|
| -9 | 0 |
| -5 | 4 |
| -4 | 5 |

| *x* | *y = - x - 9* |
|---|---|
| -9 | 0 |
| -10 | 1 |
| -11 | 2 |

La gráfica es:



***Ejemplo 3:***

$f(x) = \left|x^2 - 2x - 8\right|$

Procediendo análogamente la función es:

$$f(x) = \left|x^2 - 2x - 8\right| = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & si \quad x^2 - 2x - 8 \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 8 & si \quad x^2 - 2x - 8 < 0 \end{cases}$$

Resolvemos las inecuaciones (lo único que cambia es que son inecuaciones de segundo grado):

$x^2 - 2x - 8 \geq 0$

Resolvemos primero la ecuación asociada $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -2$ y $x_2 = 4$, con lo que podemos resolver las inecuaciones:

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 4)$ | $(4, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | -3 | 0 | 5 |
| $x^2 - 2x - 8$ | 7 | -8 | 7 |
| signo de $x^2 - 2x - 8$ | + | - | + |

Por tanto, $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ en $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

$x^2 - 2x - 8 < 0$ en $(-2, 4)$

Con lo que la función queda expresada en las siguientes ramas:

$$f(x) = \left|x^2 - 2x - 8\right| = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & si \quad x \leq -2 \\ -x^2 + 2x + 8 & si \quad -2 < x < 4 \\ x^2 - 2x - 8 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Tenemos que representar trozos de dos parábolas:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow V\left(1, f(1)\right) \Rightarrow V\left(1, -9\right)$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje *OY*: (0,-8)
Con el eje *OX*: (-2,0), (4,0) (los hemos hallado al resolver la ecuación)

Construimos una tabla de valores para ayudarnos:

| *x* | *f(x)* |
|---|---|
| -3 | 7 |
| -2 | 0 |
| 0 | -8 |
| 1 | -9 |
| 2 | -8 |
| 4 | 0 |
| 5 | 7 |

2) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow V\left(1, f(1)\right) \Rightarrow V\left(1, 9\right)$

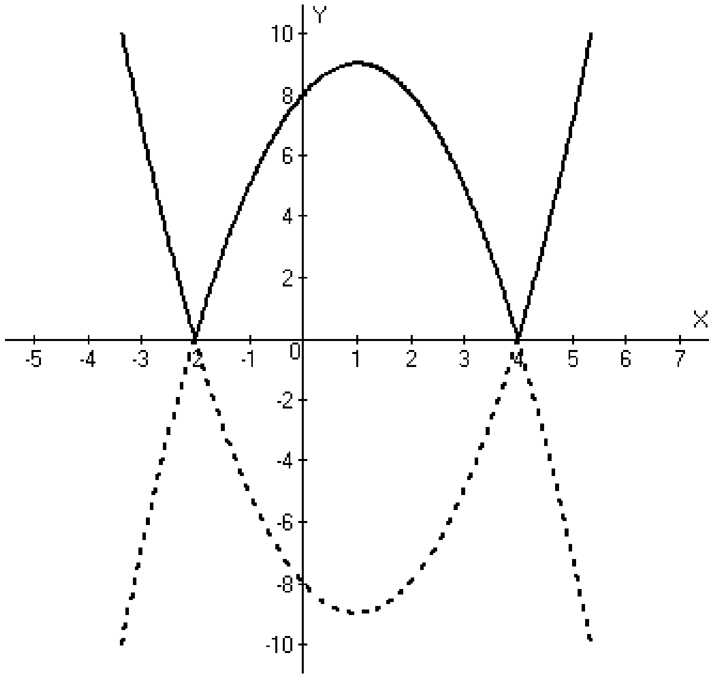
Puntos de corte con los ejes:

Con el eje *OY*: (0,8)
Con el eje *OX*: (-2,0), (4,0) (la ecuación es equivalente a la anterior)

Construimos una tabla de valores para ayudarnos:

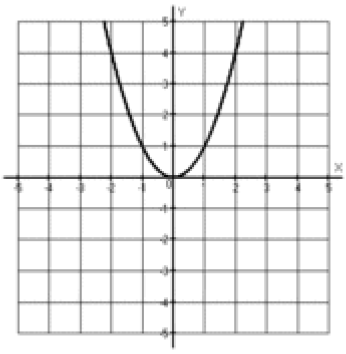
| *x* | *f(x)* |
|---|---|
| -3 | -7 |
| -2 | 0 |
| 0 | 8 |
| 1 | 9 |
| 2 | 8 |
| 4 | 0 |
| 5 | -7 |

Representando cada parábola y quedándonos con los intervalos en que está definida cada una, la gráfica es:

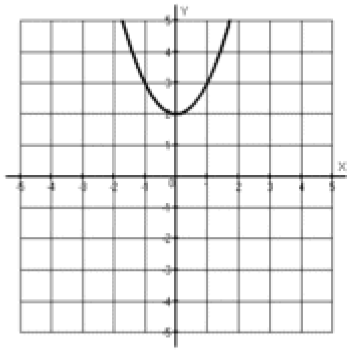



Observamos cómo la gráfica queda siempre por encima del eje *OX* y cómo lo que hemos hecho es "darle la vuelta" a la parte negativa de la gráfica, esto es, cambiar el signo a las imágenes negativas.

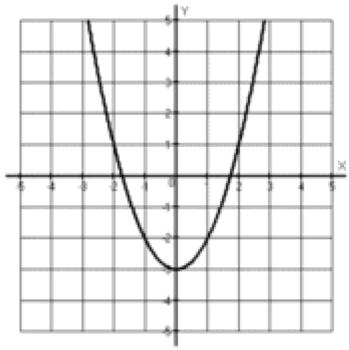
# PARÁBOLAS



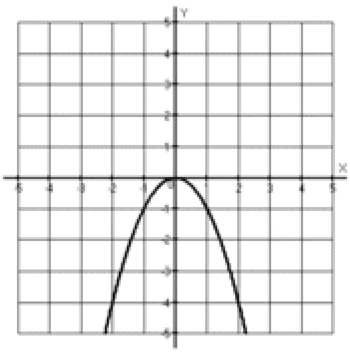
$y = x^2$



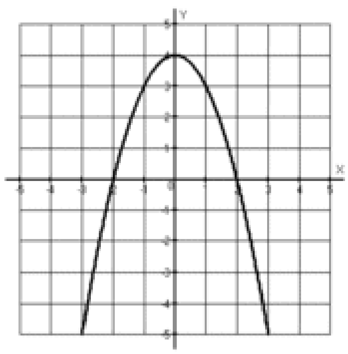
$y = x^2 + 2$



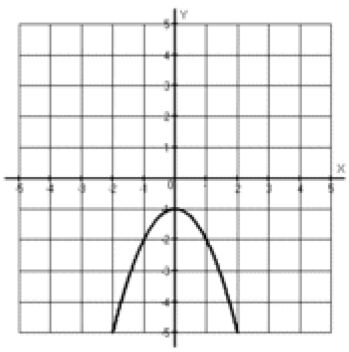
$y = x^2 - 3$



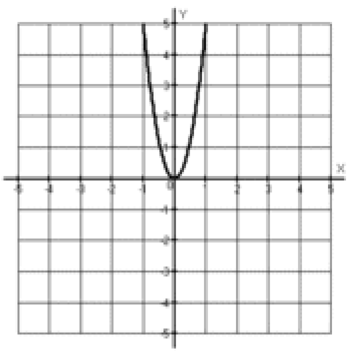
$y = -x^2$



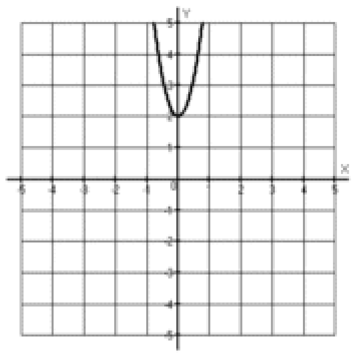
$y = -x^2 + 4$



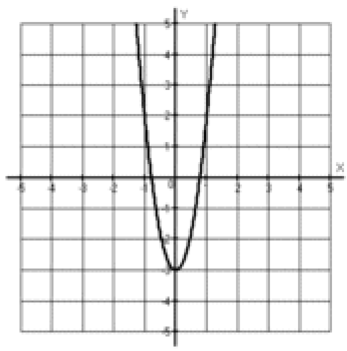
$y = -x^2 - 1$



$y = 5x^2$

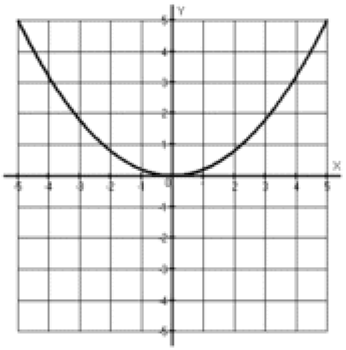


$y = 5x^2 + 2$

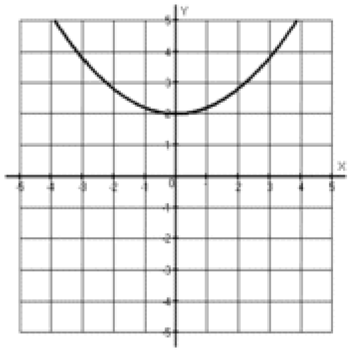


$y = 5x^2 - 3$

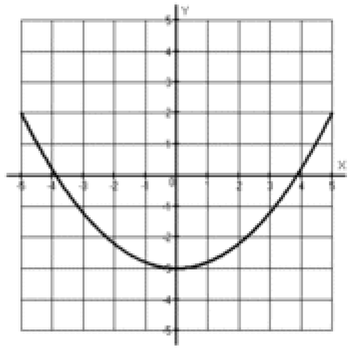
# PARÁBOLAS (CONTINUACIÓN)



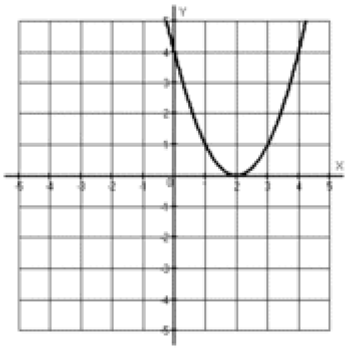
$y = \frac{1}{5}x^2$



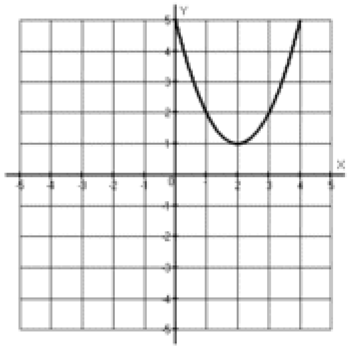
$y = \frac{1}{5}x^2 + 2$



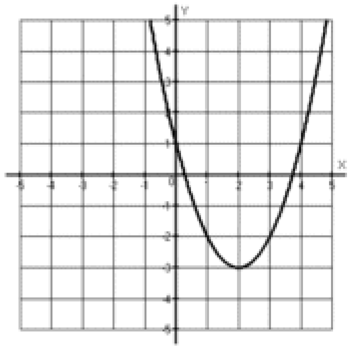
$y = \frac{1}{5}x^2 - 3$



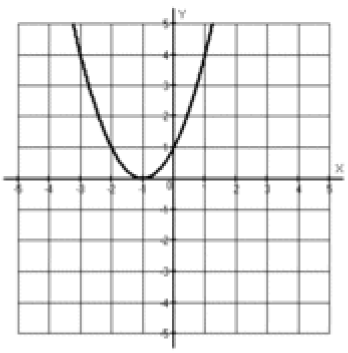
$y = \left(x-2\right)^2$



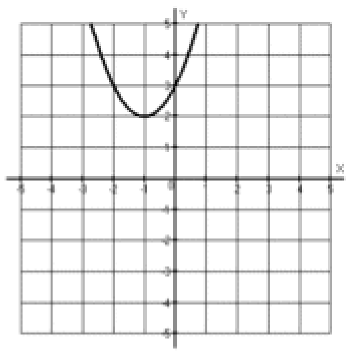
$y = \left(x-2\right)^2 + 1$



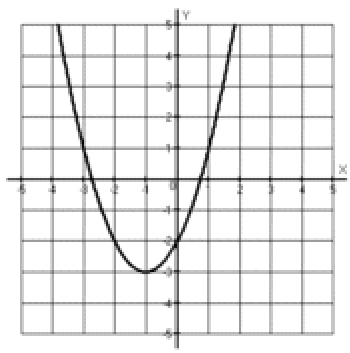
$y = \left(x-2\right)^2 - 3$



$y = \left(x+1\right)^2$



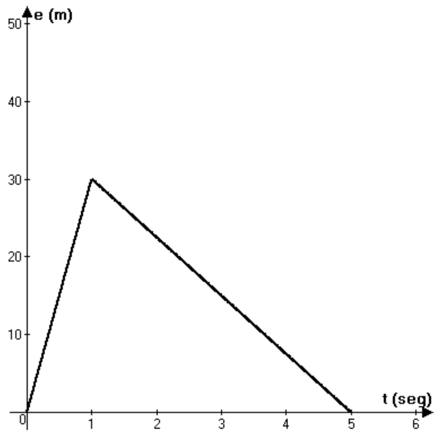
$y = \left(x+1\right)^2 + 2$



$y = \left(x+1\right)^2 - 3$

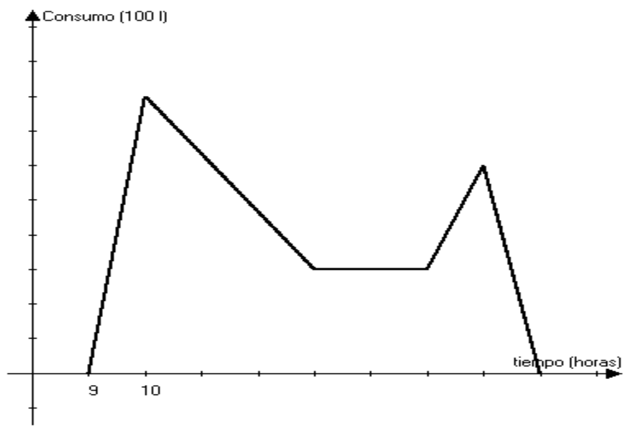
# EJERCICIOS DE FUNCIONES Y GRAFICAS

1) A partir de la gráfica contesta a las siguientes preguntas:




a) Escribe un punto de la gráfica y expresa matemáticamente lo que esto significa.
b) Da dos puntos que estén en el dominio y otros dos que no lo estén. Explica por qué. ¿Cuál es el dominio?
c) Indica los intervalos donde crece o decrece la función así como los extremos relativos.
d) ¿Posee extremos absolutos?
e) ¿Es continua esta función?
f) ¿Cuál es el recorrido?
g) Indica en qué intervalos es positiva la función y en cuáles negativa.

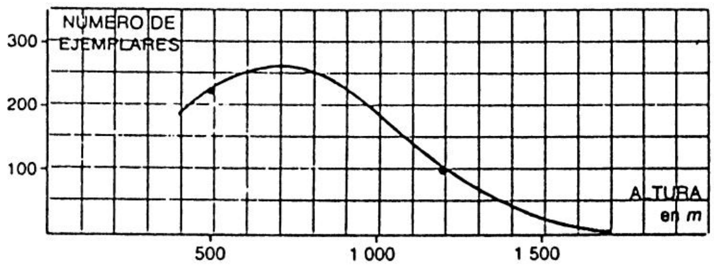
2) El consumo de agua en un colegio varía según las horas tal como muestra la siguiente gráfica




a) ¿Cuáles son la variable independiente/dependiente? Significado.

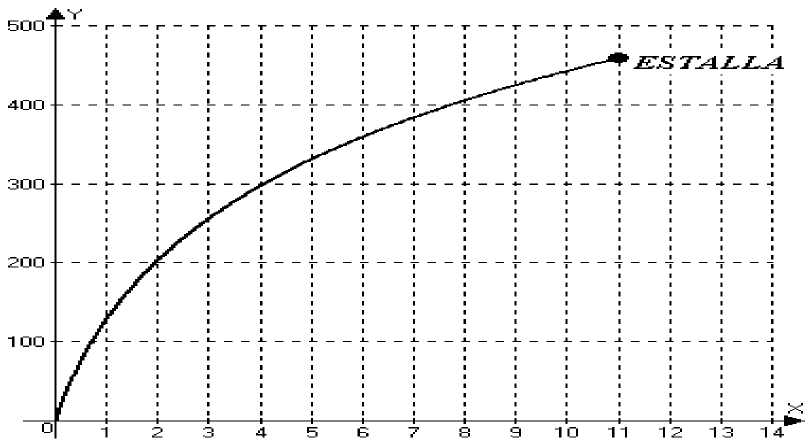
b) ¿Cuándo se produce el mayor consumo de agua? ¿Cómo se expresa esto matemáticamente?
c) Explica el proceso seguido durante el día en el consumo.

3) En una cierta comarca española hay una especie vegetal que aparece con frecuencia. Se ha estudiado la cantidad media aproximada de ejemplares por hectárea que hay a las distintas alturas .A partir de la gráfica vamos a estudiar la influencia de la altura sobre esa especie vegetal.




a) ¿Cuáles son las variables que se relacionan?¿Cuál es la dependiente y cuál la independiente?
b) La gráfica pasa por el punto (500,225) ¿qué quiere esto decir?
c) ¿Cuál es la imagen de *x=1200*.? Significado.
d) Halla *y(700), y(1000)*.
e) ¿Cuántos ejemplares cabe esperar a 2000 m. de altura? Relaciona esto con el dominio.
f) Explica el crecimiento y extremos.

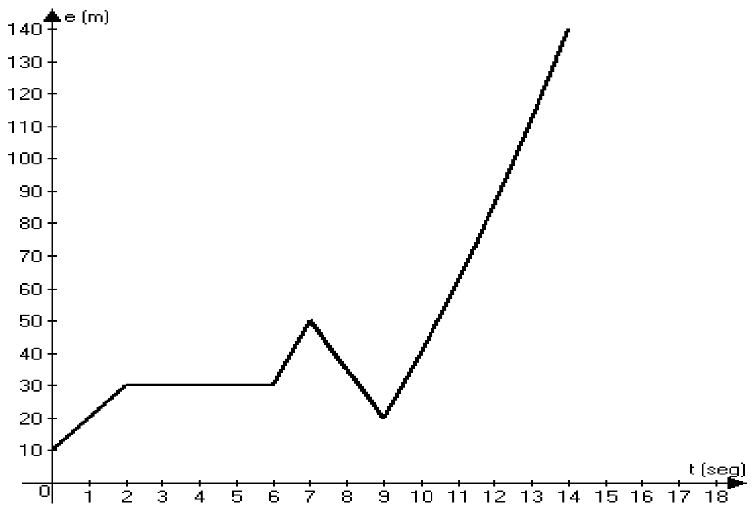
4) La siguiente gráfica representa la altura a la que con el paso del tiempo se encuentra un globo de hidrógeno hasta que estalla.




a) ¿Cuánto tiempo tarda en estallar?¿A qué altura se produce?
b) Relaciona los datos anteriores con el dominio y con los extremos absolutos.
c) ¿Posee extremos relativos? ¿Por qué?

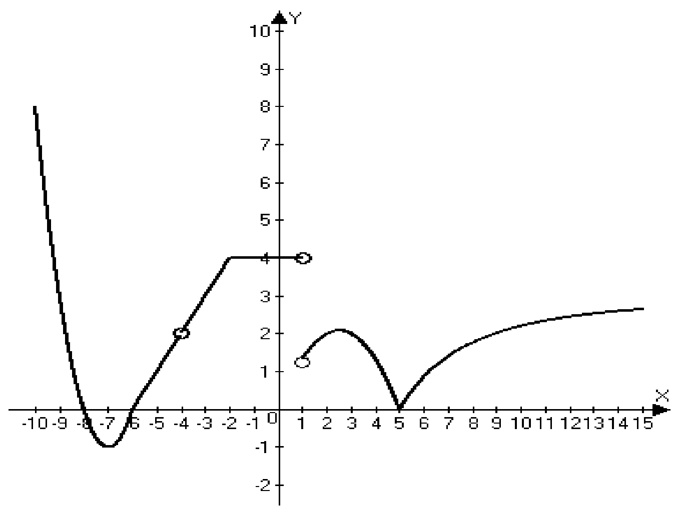
d) ¿Podemos estudiar la tendencia de esta función?

5) La siguiente gráfica muestra la relación entre recorrido por un móvil y el tiempo transcurrido:




a) Variables independiente y dependiente.
b) Explica los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cómo es la función en el segundo tramo?
c) ¿Posee extremos relativos? ¿Y absolutos? ¿Está acotada?
d) ¿Cuál es el dominio?
e) ¿Es continua la función?
f) ¿Cuál es la tendencia?

6) Tenemos una función cuya gráfica es la siguiente:




a) Halla y(5),y(1).
b) ¿Cuál es el dominio?

c) Indica un punto que sea de la gráfica y otro que no.
d) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) ¿Es continua la función?
f) Halla los puntos de corte con los ejes.
g) Estudia su tendencia.
h) ¿Tiene extremos absolutos?
i) ¿En qué intervalos es positiva y en cuáles negativa?
j) ¿Cuál es su recorrido?

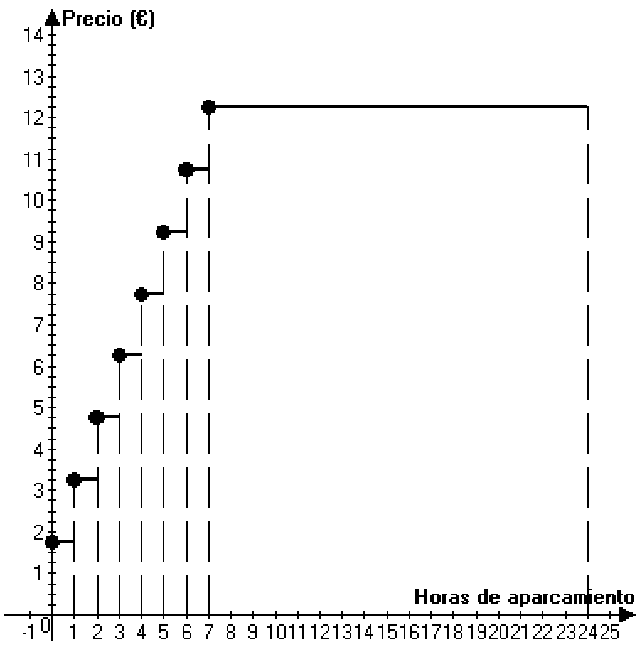
7) Un fabricante de latas de refrescos necesita realizar latas cilíndricas de 33 cc de volumen.

a) Expresa la relación entre la altura de la lata y el radio de su base.
b) Expresa el área total de la lata en función del radio de la base.

8) Encuentra la función que relaciona el área de un rectángulo con uno de sus lados, sabiendo que su perímetro es 12 cm.

a) ¿Qué tipo de función es ?
b) Represéntala gráficamente.
c) Halla su dominio y su recorrido.
d) ¿Para qué valores es una función creciente? ¿Qué significa esto?

9) La gráfica de la tarifa diaria en el aparcamiento de un aeropuerto es:

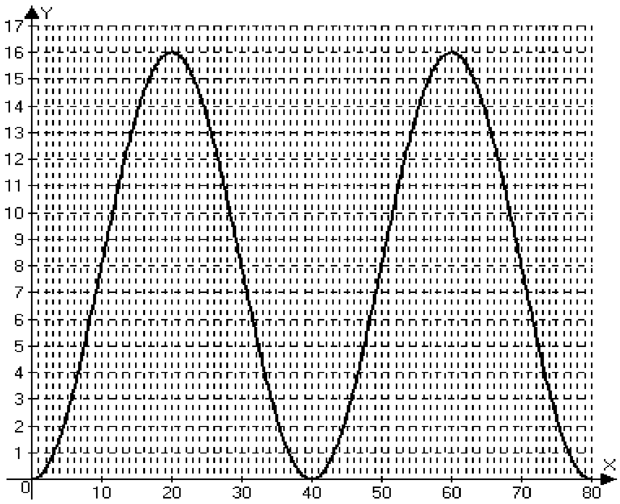



a) Indica cómo debería explicar la información de los precios el concesionario del aparcamiento para que los usuarios entiendan el coste según el tiempo que permanezcan estacionados.

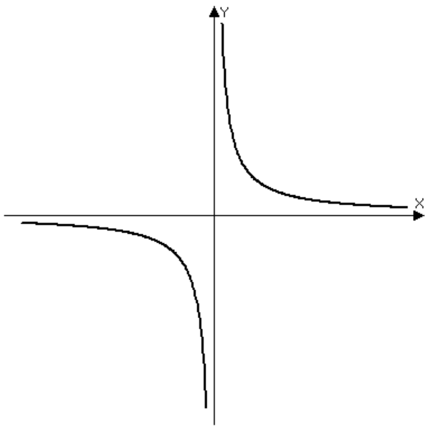
b) ¿Cuánto le cuesta el aparcamiento a una persona que ha estacionado el coche una hora y diez minutos? ¿Y por tres horas y cincuenta minutos?
c) Pedro aparcó el coche el jueves a las doce horas y regresó el domingo a las 16 horas.¿Cuánto debe pagar?

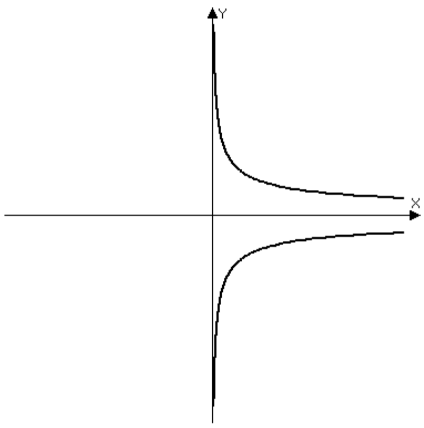
10) Los cestillos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Esta es la representación gráfica de la función tiempo-distancia al suelo de uno de los cestillos:

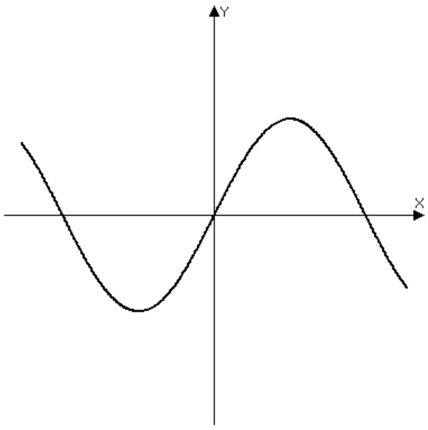
a) ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa?
b) Observa cuál es la altura máxima y di cuál es el radio de la noria.
c) ¿De qué tipo es la gráfica? ¿Cuál es el período?
d) Explica cómo podríamos calcular la altura a los 130 segundos sin necesidad de continuar la gráfica .

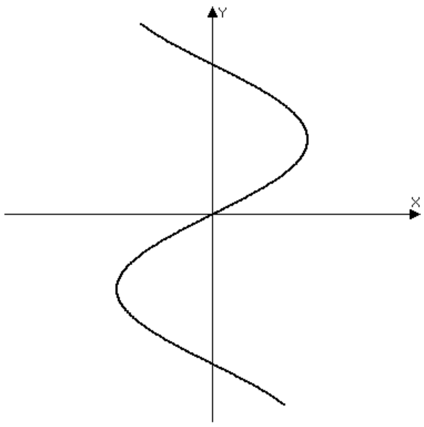



11) Dadas las siguientes gráficas:






a) Indica razonándolo cuáles corresponden a una función y cuáles no.
b) Para las que corresponden a funciones, indica el dominio y el recorrido.

12) El aparcamiento de un centro comercial tiene la siguiente tarifa de precios:

| PRECIO DESDE LAS 9:00 HASTA LAS 22:00 | |
|---|---|
| Las dos primeras horas | gratuito |
| 3ª hora o fracción y sucesivas | 1 € |
| Máximo diario | 10 € |

Representa la gráfica de la función *tiempo de aparcamiento-coste*.

13) En la factura del gas de una ciudad se paga una cantidad fija de 20 € y 60 céntimos por cada metro cúbico que se consuma.

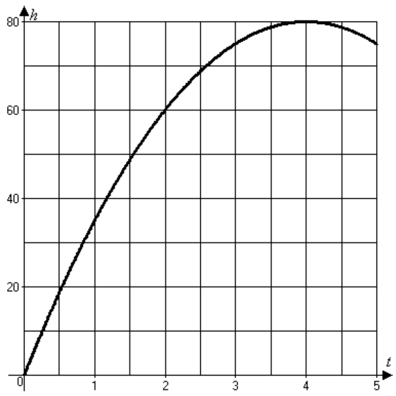
a) Calcula cuanto hay que pagar por 3 $m^3$. ¿Y por 15 $m^3$?
b) Encuentra la expresión analítica que expresa lo que hay que pagar en función del consumo realizado.
c) Representa la anterior función. ¿Qué características tiene?

14) Se alquila un microbús de 12 plazas para realizar una excursión, por un total de 360 €.

a) Haz una tabla del precio de la excursión por persona, en función de las plazas cubiertas.
b) Representa estos datos en una gráfica.
c) ¿Puedes establecer alguna relación algebraica entre las variables?
d) La variable independiente, ¿es discreta o continua?
e) ¿Tiene algún sentido unir mediante una línea los puntos de la gráfica? ¿Por qué?

15) Una de las siguientes expresiones analíticas de funciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura *h*, alcanzada por un balón que se lanza hacia arriba, y el tiempo *t*.¿Cuál de ellas es?

a) $h = t^2 + 80$
b) $h = 8t - t^2$
c) $h = 40t - 5t^2$
d) $h = -4t^2 + 80t$



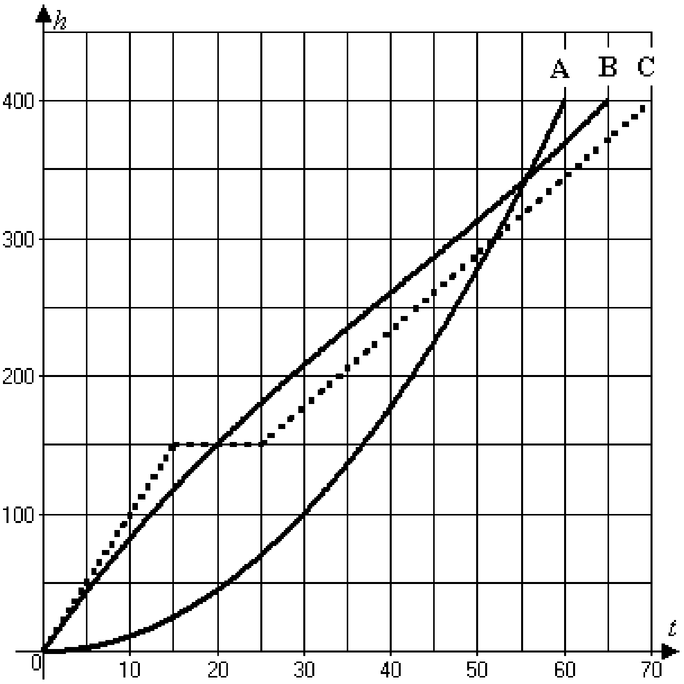

16) Completa la tabla que relaciona la base y la altura de los rectángulos cuya área es 24 $cm^2$.

| base, x (cm) | 0’5 | 1 | 1’5 | 2 | 2’5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| altura, y (cm) | | | | | | |

a) Representa gráficamente la función.
b) ¿Cuál de estas tres expresiones corresponde a la función?

$y = \frac{x}{24}$ $\qquad$ $y = \frac{24}{x}$ $\qquad$ $y = 24x$

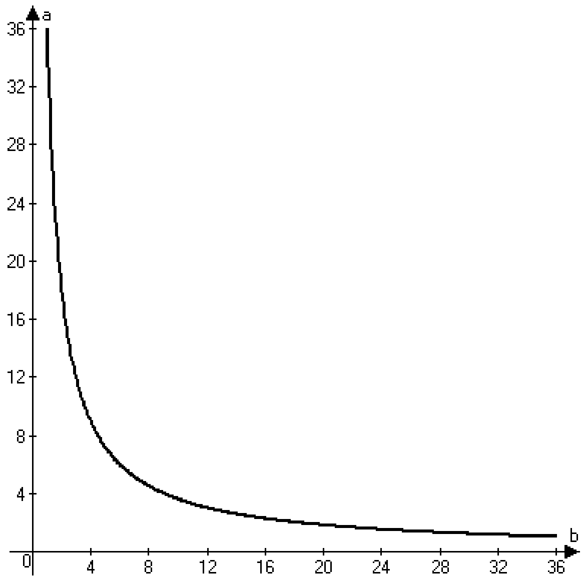
17) Estas tres gráficas describen de forma aproximada el comportamiento de tres atletas, A, B, C, en una carrera de 400 metros lisos.




a) ¿Cuál de los tres salió a más velocidad?
b) ¿Quién ganó?

c) Describe lo más pormenorizadamente posible la carrera.

18) La gráfica siguiente relaciona la base $b$ y la altura $a$ de distintos rectángulos de igual área.




a) ¿Qué valor tiene dicha área?

b) ¿Cuál de las siguientes expresiones describiría la gráfica?

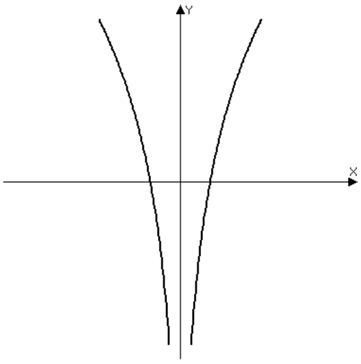
i) $a = \frac{36}{b}$  ii) $a = 36b$  iii) $a = \frac{b}{36}$

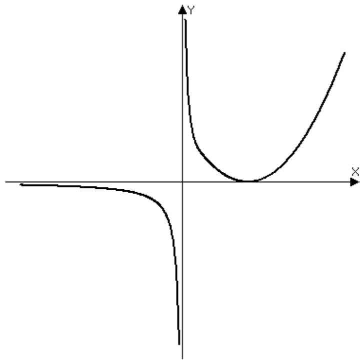
c) ¿Podrías completar los datos siguientes?

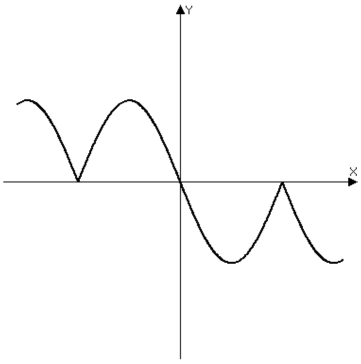
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 5 | | 7 | 8 | | 10 | | 12 | |
| $a$ | | | | | | | | | |

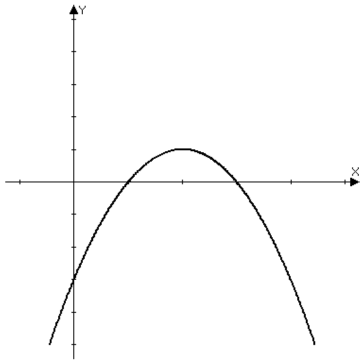
d) ¿Cuál es el punto de la gráfica que corresponde a un cuadrado?
e) ¿Presenta alguna tendencia la gráfica?
f) ¿Cuál es el dominio de definición? ¿Qué significa esto para el tema que estamos tratando?

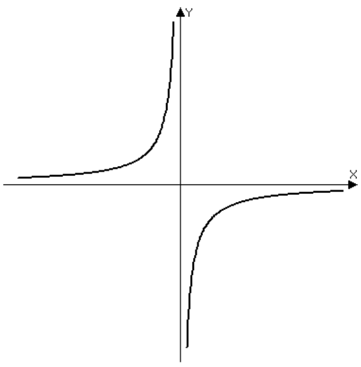
19) Explica cuáles de las siguientes funciones presentan algún tipo de simetría:




20) Determina el dominio o campo de existencia de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 5$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2 - x - 6}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

h) $f(x) = \sqrt{-2x^2 - 7x + 9}$

i) $f(x) = \sqrt{x + 7x^3}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+7}}$

k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{\dfrac{x}{2} + 7}}$

l) $f(x) = \sqrt[3]{-5x^2 + 1}$

21) Indica qué simetría presentan las siguientes funciones:

a) $f(x)=x$
b) $f(x)=x^2+5$
c) $f(x)=x^3-7x$
d) $f(x)=\frac{1}{x}$
e) $f(x)=x^5-x^3+x$
f) $f(x)=\frac{x+3}{2x-4}$
g) $f(x)=x^2-x$

22) Determina los puntos de intersección con los ejes cartesianos de las siguientes funciones:

a) $y=-x+3$
b) $y=2x^2-8$
c) $y=\frac{3}{7}x-\frac{2}{5}$
d) $y=4x^2+7$
e) $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$
f) $y=6x$

En el caso de parábolas determinar su vértice.

23) Calcula la expresión analítica para las siguientes rectas:

a) Pasa por el origen de coordenadas y su pendiente es 7.
b) Recta horizontal que pasa por el punto $P(-2,5)$.
c) Paralela a la bisectriz del segundo-cuarto cuadrante y pasa por el punto $Q(3,1)$.
d) Recta de pendiente 3 y ordenada en el origen 3.

24) Sabiendo que la parábola $y = ax^2 - 4x + 5$ pasa por el punto $P(1,4)$, obtén el valor de $a$.

25) La parábola $y = x^2 + bx + c$ tiene por vértice a $V(2,-1)$. Calcula los valores de $b$ y $c$.

26) Calcula la función cuadrática cuya gráfica pasa por los puntos $M(1,17)$, $N(5,7)$ y $P(-1,5)$.

27) Determinar las funciones de las siguientes parábolas:

a) Vértice en $V(3,-5)$ y pasa por el origen de coordenadas.
b) Parábola tangente al eje de abscisas en $R(2,0)$ y pasa por $S(3,25)$.

28) Representa gráficamente las siguientes parábolas y estudia las diferencias existentes entre ellas:

a) $y = x^2 - 4x - 5$  b) $y = -2x^2 - 4x + 30$  c) $y = -2x^2 - 1$

29) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 4$ y $h(x) = 2x + 5$, calcula las siguientes composiciones:

a) $f \circ g$  b) $g \circ f$  c) $g \circ h$

30) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ y $h(x) = \dfrac{2}{x+1}$, calcula las siguientes composiciones:

a) $f \circ g$  c) $f \circ h$  e) $f \circ f$
b) $g \circ f$  d) $h \circ g$  f) $h \circ h$

31) Dadas las funciones $f(x)=x^3$, $g(x)=\log x$, $h(x)=\operatorname{sen} x$ y $j(x)=10^x$, calcula las siguientes composiciones:

a) $g\circ f$
b) $h\circ f$
c) $f\circ h$
d) $j\circ f$
e) $g\circ j$
f) $j\circ g$
g) $g\circ h\circ j$
h) $f\circ j\circ g$
i) $j\circ f\circ g$

32) Dadas las funciones $f(x)=x^2+x$, $g(x)=e^x$ y $h(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{2}$, calcula las siguientes composiciones:

a) $f\circ g$
b) $f\circ h$
c) $g\circ h$
d) $f\circ g\circ h$
e) $f\circ h\circ g$
f) $g\circ f\circ h$
g) $g\circ h\circ f$
h) $h\circ f\circ g$
i) $h\circ g\circ f$

33) Dadas las funciones $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2-4$, $h(x)=x^2-2x$ y $j(x)=\sqrt{2x-3}$, calcula sus respectivas funciones inversas $f^{-1}$, $g^{-1}$, $h^{-1}$ y $j^{-1}$. Comprueba que la composición de cada función con su inversa da como resultado la función identidad (La función identidad es la función $I(x)=x$

34) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x\in[-3,1) \\ x+2 & si \quad x\in(1,2] \\ -x+6 & si \quad x>2 \end{cases}$

Represéntala gráficamente indicando cual es su dominio, los intervalos de crecimiento, los extremos acotación y su continuidad.

35) Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \quad x<-1 \\ -\dfrac{x}{2}+4 & si \quad x\geq -1 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & si \quad -2<x\leq 4 \\ -x+9 & si \quad x>4 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} x^2-6x+5 & si \quad x\in(0,5) \\ -x^2+12x-35 & si \quad x\in[5,+\infty) \end{cases}$

d) $p(x)=\begin{cases} 2^x & si \quad x\leq 0 \\ 1 & si \quad 0<x\leq 3 \\ x-2 & si \quad x>4 \end{cases}$

e) $q(x)=\begin{cases} |x-1| & si \quad x<2 \\ (x-1)^2+1 & si \quad x>2 \end{cases}$

36) Representa gráficamente las siguientes funciones de valor absoluto:

a) $f(x)=|x|$
b) $f(x)=|x+1|$
c) $f(x)=|2x-3|$
d) $f(x)=|x^2+2x+3|$
e) $f(x)=|-x^2-6x-8|$

37) Estudia y representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y=5^x$
b) $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$
c) $y=2\cdot 3^{2x}$

38) Expresa en forma radical y logarítmica:

a) $4^3=64$
b) $\log_2 1024=10$

39) Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 81$
b) $\log_2 1024$
c) $\log_{\frac{1}{3}} 9$
d) $\log_{\frac{1}{2}} 1024$
e) $\log_3 1$
f) $\log_8 8$
g) $\log_5 625$
h) $\log_{\sqrt{2}} 4$
i) $\log_9 3$
j) $\log_4 \sqrt{2}$
k) $\log_2 \sqrt[5]{16}$
l) $\log 0'001$
m) $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3}$
n) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$
o) $\log_2 \frac{1}{64}$
p) $\log_3 3\sqrt{3}$
q) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

40) Sabiendo que $\log 2 = 0'3010$, calcula:

a) $\log 1024$
b) $\log 200$
c) $\log 50$
d) $\log 625$
e) $\log 8$
f) $\log 5$
g) $\log 200^7$
h) $\log \sqrt[3]{0'002}$
i) $\log 0'25$
j) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$
k) $\log \sqrt[4]{\frac{1}{0'008}}$
l) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$
m) $\log \sqrt[5]{80^4}$

41) Sabiendo que $\log 3 = 0'477$ , calcula:

a) $\log 30$
b) $\log 300$
c) $\log 3000$
d) $\log 0'3$
e) $\log 0'03$
f) $\log 0'003$

42) Sabiendo que $\log k = 14'4$, calcula el valor de $k$ en las siguientes expresiones:

a) $\log \dfrac{k}{100}$
b) $\log\left(0'1\cdot k^2\right)$
c) $\log \sqrt[3]{\dfrac{1}{k}}$

43) Determina el valor desconocido en cada caso:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{8} = x$
b) $\log_x 27 = 3$
c) $\log_4 x = 3$
d) $3^{2x-1} = 9$
e) $2^{4-x^2} = 4$

44) Pon en forma de potencias las siguientes expresiones logarítmicas y viceversa:

a) $\log 1000 = 3$
b) $\log_7 \dfrac{1}{49} = -2$
c) $8^2 = 64$
d) $10^{-2} = 0'01$

45) Halla el valor de $x$ en los siguientes casos:

a) $\log_7 x = 2$
b) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$
c) $\log_x 8 = 3$

46) Dadas las funciones: $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ , $h(x) = \ln x$ y $j(x) = 3\log_2(4x)$,

a) Represéntalas gráficamente.
b) Indica las características de cada función.
c) Compara las gráficas explicando similitudes y diferencias
d) ¿Presentan alguna tendencia?

47) Halla el dominio de las funciones $f(x) = \log(x+3)$ y $g(x) = \log_2\left(x^2-4\right)$. Representa gráficamente la primera función e indica sus características.

48) Calcula el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Represéntala gráficamente.

49) Halla el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ \dfrac{5}{x+7} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} |x| & si \quad x<2 \\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

50) Con ayuda de la calculadora, dibuja la gráfica de las funciones $f(x)=\text{sen}\, x$ y $g(x)=\cos x$. Explica las características de cada una de ellas e indica semejanzas y diferencias.

# EJERCICIOS DE LOGARITMOS RESUELTOS

1) Desarrollar aplicando logaritmos las siguientes expresiones:

a) $A=\frac{a^2b^3c}{d^5e}$ b) $B=\sqrt[3]{\frac{a^2b}{\sqrt{c^2}d}}$

a) $\log A=\log\frac{a^2b^3c}{d^5e}$

Primero aplicamos la propiedad del logaritmo de un cociente que nos decía que era igual a la diferencia de los logaritmos del numerador y del denominador:

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$$

Con lo cual obtendríamos la siguiente expresión:

$$\log A=\log\frac{a^2b^3c}{d^5e}=\log\left(a^2b^3c\right)-\log\left(d^5e\right)$$

A esta expresión le aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto que es igual a la suma de los logaritmos de los factores respectivos:

$$\log\left(a\cdot b\right)=\log a+\log b$$

Obteniendo la siguiente expresión:

$$\log A=\log\frac{a^2b^3c}{d^5e}=\log\left(a^2b^3c\right)-\log\left(d^5e\right)=$$
$$=\left(\log a^2+\log b^3+\log c\right)-\left(\log d^5+\log e\right)$$

Ahora aplicamos el logaritmo de una potencia:

$$\log a^m=m\log a$$

Con lo cual, nos queda:

$$\log A=\log\frac{a^2b^3c}{d^5e}=\log\left(a^2b^3c\right)-\log\left(d^5e\right)=$$
$$=\left(\log a^2+\log b^3+\log c\right)-\left(\log d^5+\log e\right)=$$
$$=2\log a+3\log b+\log c-5\log d-\log e\ (*)$$

$(*)$ (**Ojo: cuidado con el signo menos delante de un paréntesis**)

Así, la solución final es:

$$\boxed{\log A = 2\log a + 3\log b + \log c - 5\log d - \log e}$$

b) $\log B = \log \sqrt[3]{\dfrac{a^2 b}{\sqrt{c^2}\,d}}$

Como sabemos el logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice de la raíz. Aplicamos la definición:

$$\log B = \frac{\log\left(\dfrac{a^2 b}{\sqrt{c^2}\,d}\right)}{3},$$

o lo que es lo mismo:

$$\log B = \frac{1}{3}\log\left(\frac{a^2 b}{\sqrt{c^2}\,d}\right)$$

Ahora aplicamos el logaritmo de un cociente:

$$\log B = \frac{1}{3}\left(\log a^2 b - \log\sqrt{c^2}\,d\right)$$

Como tenemos el logaritmo de dos productos, pues aplicamos el logaritmo de un producto:

$$\log B = \frac{1}{3}\left(\log a^2 + \log b - \left(\log\sqrt{c^2} + \log d\right)\right)$$

Si nos damos cuenta, raíz cuadrada de *c* al cuadrado es *c* por lo que desde un principio podíamos haber sustituido $\sqrt{c^2}$ simplemente por *c*. Lo haremos ahora:

$$\log B = \frac{1}{3}\left(\log a^2 + \log b - \left(\log c + \log d\right)\right)$$

Quitando paréntesis (**ojo: cuidado con el. signo menos**) y aplicando el logaritmo de una potencia para el caso de $a^2$:

$$\log B = \frac{1}{3}\left(2\log a + \log b - \log c - \log d\right)$$

Multiplicamos $\frac{1}{3}$ por el paréntesis y obtenemos la solución:

La solución es:

$$\boxed{\log B = \frac{2}{3}\log a + \frac{1}{3}\log b - \frac{1}{3}\log c - \frac{1}{3}\log d}$$

2) Determinar las expresiones de $A$ y $B$:

a) $\log A = 7\log x - \frac{1}{2}\log y + \log z$ b) $\log B = \log a + \frac{\log b}{m} - \log c - \frac{\log d}{n}$

a) $\log A = 7\log x - \frac{1}{2}\log y + \log z$

$\log A = \log x^7 - \frac{1}{2}\log y + \log z$ (Logaritmo de una potencia)

$\log A = \log x^7 - \log\sqrt{y} + \log z$ (Logaritmo de una raíz)

$\log A = \log\frac{x^7}{\sqrt{y}} + \log z$ (Logaritmo de un cociente)

$\log A = \log\left(\frac{x^7}{\sqrt{y}}\cdot z\right)$ y, por lo tanto, $A = \frac{x^7 z}{\sqrt{y}}$

La solución es: $\boxed{A = \frac{x^7 z}{\sqrt{y}}}$

b) $\log B = \log a + \frac{\log b}{m} - \log c - \frac{\log d}{n}$

$\log B = \log a + \log\sqrt[m]{b} - \log c - \log\sqrt[n]{d}$ (Logaritmo de una raíz)

$\log B = \left(\log a + \log\sqrt[m]{b}\right) - \left(\log c + \log\sqrt[n]{d}\right)$

$\log B = \left(\log a\cdot\sqrt[m]{b}\right) - \left(\log c\cdot\sqrt[n]{d}\right)$ (Logaritmo de un producto)

$\log B = \log\left(\frac{a\cdot\sqrt[m]{b}}{c\cdot\sqrt[n]{d}}\right)$ (Logaritmo de un cociente)

Luego la solución es: $\boxed{B = \frac{a\cdot\sqrt[m]{b}}{c\cdot\sqrt[n]{d}}}$

3) Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\left.\begin{array}{r} 2\log x - 2\log y = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{array}\right\}$    b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{array}\right\}$

c) $3 + \log x = \log 57 - \log 19$    d) $\log x^2 - \log x = 32$

a) $\left.\begin{array}{r} 2\log x - 2\log y = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{array}\right\}$    $\left.\begin{array}{r} \log x^2 - \log y^2 = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{array}\right\}$

Como $\log 10 = 1$ y $\log 1000 = 3$, sustituimos en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \log x^2 - \log y^2 = \log 10 \\ \log x + \log y = \log 1000 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} \log\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right) = \log 10 \\ \log(x \cdot y) = \log 1000 \end{array}\right\}$$

De ahí deducimos que:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{y^2} = 10 \\ x \cdot y = 1000 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, del cual nos resulta una ecuación bicuadrada, obtenemos los valores de *x* e *y*

Solución: $\boxed{x = \sqrt[4]{10^7}\ ,\ y = \sqrt[4]{10^5}}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{r} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 15 \\ \log(x \cdot y) = 2 \end{array}\right\}$. Como $2 = \log 100$,

$\left.\begin{array}{r} x - y = 15 \\ \log(x \cdot y) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 15 \\ \log(x \cdot y) = \log 100 \end{array}\right\}$ de donde:

$\left.\begin{array}{r} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{array}\right\}$. Resolviendo el sistema, obtenemos como soluciones:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 = 20 \\ y_1 = 5 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_2 = -5 \\ y_2 = -20 \end{array}}.$$

La segunda solución la desechamos por no existir logaritmos de números negativos.

Luego la solución es: $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 20 \\ y_1 = 5 \end{array}}$

c) $3 + \log x = \log 57 - \log 19$

$3 + \log x = \log 57 - \log 19$ Restando 3 en ambos miembros:

$\log x = \log 57 - \log 19 - 3$

Como $\log 57 = 1'7558749$ y $\log 19 = 1'2787536$ ,

$\log x = 1'7558749 - 1'2787536 - 3 = -2'5228787$ , por lo que

$x = 10^{-2'5228787} = 0'003$

La solución es: $\boxed{x = 0'003}$

OTRA FORMA DE SOLUCIONAR LA MISMA ECUACIÓN:

$3 + \log x = \log 57 - \log 19$ Como $3 = \log 1000$ , sustituimos en la ecuación inicial, quedándonos:

$\log 1000 + \log x = \log 57 - \log 19$ Ahora, aplicando las propiedades de los logaritmos obtenemos:

$\log 1000x = \log \frac{57}{19} = \log 3$ Por lo que:

$1000x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{1000} = 0'003$ $\boxed{x = 0'003}$

d) $\log x^2 - \log x = 32$

Expresando 32 en forma logarítmica, $32 = \log 10^{32}$ , conseguimos la expresión:

$\log x^2 - \log x = \log 10^{32}$ Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$\log \frac{x^2}{x} = \log 10^{32}$ De lo cual deducimos:

$$\frac{x^2}{x}=10^{32} \Rightarrow x=10^{32}$$

La solución es: $\boxed{x=10^{32}}$

4) Halla, aplicando logaritmos, el valor de las siguientes expresiones

a) $y=\dfrac{128'42\cdot\sqrt{0'364}}{8'145^4}$ b) $x=\sqrt[17]{82346'37}$

*SOLUCIÓN APARTADO A:*

Primero aplicamos logaritmos y desarrollamos la expresión:

$$\log y=\log\left(\frac{128'42\cdot\sqrt{0'364}}{8'145^4}\right)$$

Desarrollamos:

$$\log y=\log 128'42\cdot\sqrt{0'364}-\log 8'145^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log y=\log 128'42+\log\sqrt{0'364}-4\log 8'145 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log y=\log 128'42+\log\sqrt{0'364}-4\log 8'145 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log y=\log 128'42+\frac{1}{2}\log 0'364-4\log 8'145$$

Utilizando la calculadora encontramos los logaritmos de:

$\log 128'42=2'1086327$ $\log 0'364=-0'4388986$
$\log 8'145=0'910891$

Sustituyendo en la última expresión tenemos:

$$\log y=2'1086327+\frac{1}{2}\left(-0'4388986\right)-4\cdot 0'910891=-1'754381$$

Con lo cual $y=10^{-1'754381}=0'0176043$

La solución es: $\boxed{y=0'0176043}$

*SOLUCIÓN APARTADO B:*

$x=\sqrt[17]{82346'37}$ Aplicamos logaritmos:

$\log x=\log\sqrt[17]{82346'37}$ Desarrollamos:

$$\log x=\frac{1}{17}\log 82346'37$$

Buscamos con la calculadora el logaritmo de 82346,37 y vemos que es 4,9156445 con lo cual tenemos:

$$\log x=\frac{1}{17}4'9156445=0'289155$$

Por lo que $x=10^{0'289155}=1'946057$

La solución es: $\boxed{x=1'946057}$

5) Calcula, explicando como lo has hecho,. los siguientes logaritmos:

a) $\log_5 146$ b) $\log_8 18$

c) $\log_{19} 7647$ d) $\log_4(-24)$

a) $\log_5 146=\frac{\ln 146}{\ln 5}=\frac{4'9836066}{1'6094379}=3'0964889$

b) $\log_8 18=\frac{\ln 18}{\ln 8}=\frac{2'8903718}{2'0794415}=1'389975$

c) $\log_{19} 7647=\frac{\ln 7647}{\ln 19}=\frac{8'9420687}{2'944439}=3'0369346$

d) $\log_4(-24)$ No existen los logaritmos de números negativos.

6) Pon en forma de potencias las siguientes expresiones logarítmicas y viceversa:

a) $\log 1000=3$ b) $\log_7\frac{1}{49}=-2$

c) $8^2=64$ d) $10^{-2}=0'01$

a) $\log 1000=3\Rightarrow 10^3=1000$

b) $\log_7\frac{1}{49}=-2\Rightarrow 7^{-2}=\frac{1}{49}$

c) $8^2=64\Rightarrow\log_8 64=2$

d) $10^{-2}=0'01\Rightarrow\log 0'01=-2$

7) Halla el valor de $x$ en los siguientes casos:

a) $\log_7 x = 2$ b) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$ c) $\log_x 8 = 3$

a) $\log_7 x = 2$

$$\log_7 x = 2 \Rightarrow 7^2 = x \Rightarrow \boxed{x = 49}$$

b) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$

$$\log_8 \sqrt[4]{2} = x \Rightarrow 8^x = \sqrt[4]{2} \Rightarrow \left(2^3\right)^x = 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 3x = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{12}}$$

c) $\log_x 8 = 3$

$$\log_x 8 = 3 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

8) Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $\log_a \left(a^2 \sqrt{a^3}\right)$ b) $3^{\log_a a^3}$

a) $\log_a \left(a^2 \sqrt{a^3}\right)$

$$\log_a \left(a^2 \sqrt{a^3}\right) = \log_a \left(a^2 a^{\frac{3}{2}}\right) = \log_a \left(a^{\frac{7}{2}}\right)$$

Recordemos que el logaritmo de la base elevada a un exponente es el propio exponente, por lo que:

$$\log_a \left(a^{\frac{7}{2}}\right) = \boxed{\frac{7}{2}}$$

b) $3^{\log_a a^3}$

$$3^{\log_a a^3} = 3^3 = \boxed{27}$$

| 9) Determina $\log_4 64$ |
|---|

Representamos el valor del logaritmo por *n*:

$\log_4 64 = n$

Aplicando la definición de logaritmo:

$\log_4 64 = n \Rightarrow 4^n = 64$

Ahora descomponemos el número 64 en potencias de 4, si es posible (en caso de que no fuese posible el único medio de calcularlo sería mediante calculadora o tablas de logaritmos):

$64 = 4^3$, por lo que $4^n = 4^3$

Como la función exponencial es inyectiva, la igualdad entre ambas potencias implica la igualdad de exponentes, por lo que: $n = 3$

Por lo tanto la solución es: $\boxed{\log_4 64 = 3}$

| 10) Sabiendo que $\log 2 = 0'3010$, calcula $\log 8$ y $\log 5$ |
|---|

En primer lugar expresamos 8 como potencia de dos $\left(8 = 2^3\right)$ con lo cual obtenemos la expresión:

$\log 8 = \log 2^3$ la cual, aplicando el logaritmo de una potencia:

$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3 \cdot 0'3010 = 0'9030$

La solución es: $\boxed{\log 8 = 0'9030}$

Para calcular $\log 5$, expresamos 5 como $\frac{10}{2}$, con lo cual obtenemos:

$\log 5 = \log \frac{10}{2}$

Aplicando el logaritmo de un cociente:

$\log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - 0'3010 = 0'6090$

La solución es: $\boxed{\log 5 = 0'6090}$