<u>LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES</u>

ÍNDICE: **Pág.**

1. IDEA INTUITIVA DE LIMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO 80

2. APROXIMACIÓN GRAFICA AL CONCEPTO DE LÍMITE 80

3. LIMITES LATERALES 82

4. LÍMITE INFINITO 85

5. CÁLCULO NUMÉRICO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO 87

   5.1. FUNCIONES POLINÓMICAS 87
   5.2. FUNCIONES RACIONALES 87
   5.3. FUNCIONES RADICALES 89
   5.4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS 90
   5.5. FUNCIONES EXPONENCIALES 90
   5.6. FUNCIONES LOGARÍTMICAS 91

6. TENDENCIAS 92

7. ASÍNTOTAS VERTICALES 94

8. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN 96

   8.1. IDEA INTUITIVA 96
   8.2. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO 97
   8.3. EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS 101
   8.4. EJEMPLOS DE FUNCIONES CON DISCONTINUIDADES 102
   8.5. ESTUDIO DE LA DISCONTINUIDAD A PARTIR DE PARÁMETROS 102

9. REPRESENTACION APROXIMADA DE FUNCIONES 103

   9.1. FUNCIONES POLINÓMICAS 103
   9.2. FUNCIONES RACIONALES SENCILLAS 106
   9.3. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA 108

      9.3.1. DEFINICIÓN 108
      9.3.2. APLICACIONES DE LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA 112
      9.3.3. FUNCIONES RADICALES DEL TIPO $Y = \sqrt{PX + Q}$ 114

10. INTERPOLACIÓN 116

10.1. INTRODUCCIÓN 116
10.2. INTERPOLACIÓN LINEAL 117
10.3. INTERPOLACIÓN CUADRATICA 119

ANEXO I: Relación de ejercicios 121

ANEXO II: Relación de ejercicios resueltos 126

LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. IDEA INTUITIVA DE LÍMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Intuitivamente, el valor del límite de una función en un punto va a ser el número real al que se van acercando las imágenes cuando la variable x se va acercando a dicho punto.

Por ejemplo, si queremos calcular el límite de la función $y = x^2$ en el punto 3, tendremos que ver si al tomar valores de *x* muy próximos a 3, las imágenes de estos números se van acercando a algún valor o no. En el caso de que se vayan acercando a algún valor, a éste lo llamaremos límite de la función $y = x^2$ en el punto 3.

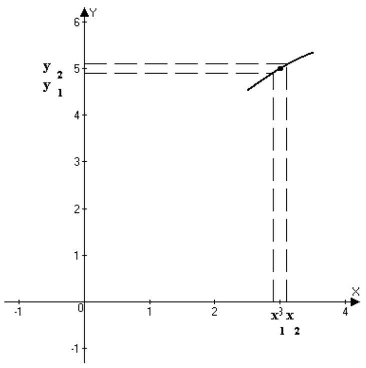
Para comprobarlo, lo que hacemos es construir una tabla en la que situamos valores de la variable *x* cada vez más próximos a 3, calculamos sus imágenes y comprobamos si van acercándose a algún número conforme *x* lo aproximamos a 3:

x	$y = x^2$
4	16
3.5	12.25
3.2	10.24
3.1	9.61
3.05	9.3025
3.02	9.1204
3.01	9.0601

Podemos observar que cuanto más se acerque el valor que tomemos de *x* a 3, más próxima estará su imagen de 9. Por eso diremos que el límite de la función $y = x^2$ en el punto 3 es 9. Y escribiremos: $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$

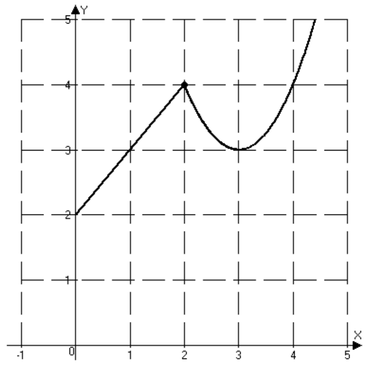
2. APROXIMACIÓN GRÁFICA AL CONCEPTO DE LÍMITE:

La idea anterior también la podemos comprobar gráficamente: se trata de, en la gráfica, comprobar a qué número se acercan las imágenes cuando el valor que tomamos de *x* se va aproximando al punto en el que estamos calculando el límite:

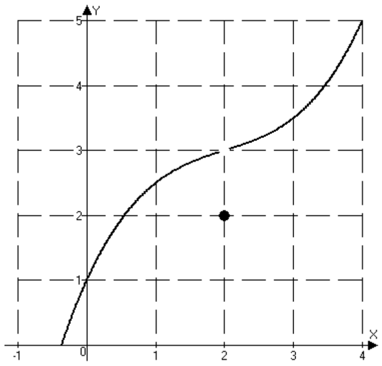


$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

Las imágenes se van aproximando a 5 cuando *x* tiende a 3: señalamos valores de *x* próximos a 3 y trazando una paralela al eje Y hasta el punto de la gráfica y después otra paralela al eje X hasta cortar al eje de ordenadas obtenemos la imagen que corresponde a cada punto.

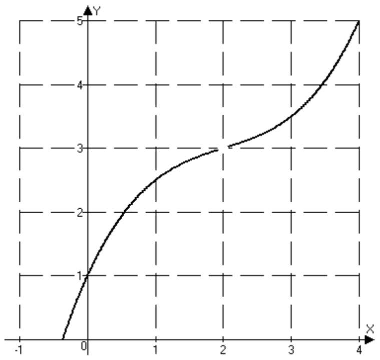


$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4$$



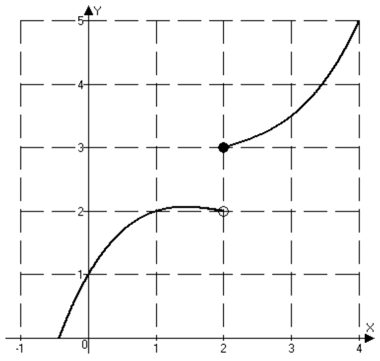
$$\lim_{x\to 2} h(x) = 3$$

Nótese que el límite en 2 no es la imagen de 2. Para calcular el límite tomamos valores de *x* próximos 2, pero nunca 2.



$$\lim_{x\to 2} j(x) = 3$$

Por la misma razón que en el apartado anterior, el hecho que no exista *j(2)* no implica necesariamente que no exista el límite en este punto.



$\lim_{x\to 2} k(x)$ no existe.

En este caso, las imágenes no se acercan a un valor cuando *x* tiende a 2.

Estos ejemplos sirven para que nos demos cuenta de que:

- ✓ Con bastante frecuencia (casos "a" y "b") el límite en un punto coincide con la imagen del punto. Esto es debido a que la función es continua, pero en el caso en que no lo sea el límite no tiene por qué coincidir con la imagen.
- ✓ En el apartado "c" existe el límite pero no coincide con la imagen. La función es discontinua en $x=2$.

- ✓ En el apartado "d" existe el límite en 2 pero no $j(2)$. La función es discontinua en $x=2$.

- ✓ En el apartado "e" no existe el límite de $k(x)$ en 2. Cuando los valores que tomamos cercanos a 2 son mayores que 2 las imágenes se acercan a 3, y cuando x está próximo a 2 pero es menor, las imágenes se acercan a 2. En este caso no existe el límite.

CONCLUSIÓN:

Si existe el límite de una función en un punto, es **ÚNICO.**

3. LIMITES LATERALES

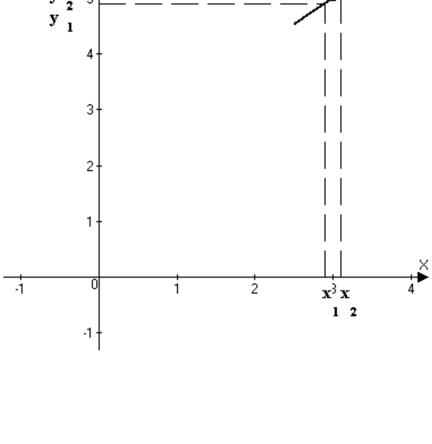
Lo expuesto en el último ejemplo del apartado anterior da pie a que nos demos cuenta de que cuando estamos calculando el límite de una función en un punto, podemos acercarnos a dicho punto de dos formas:

- Por la derecha: Con valores que se van aproximando cada vez más al punto pero que son mayores que él.

- Por la izquierda: Con valores que, se van aproximando cada vez más al punto pero que son menores que él.

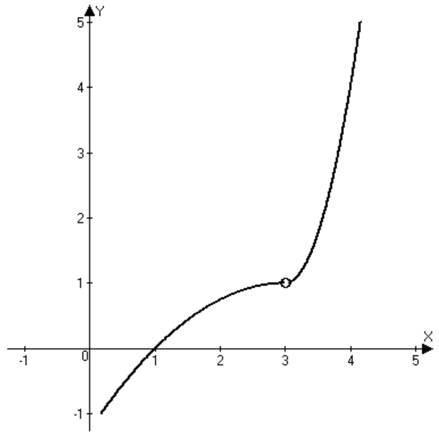
Al acercarnos por la derecha diremos que estamos calculando el límite por la derecha, y cuando nos acerquemos por la izquierda diremos que estamos calculando el límite por la izquierda. A ambos los llamamos **límites laterales de la función** en ese punto.

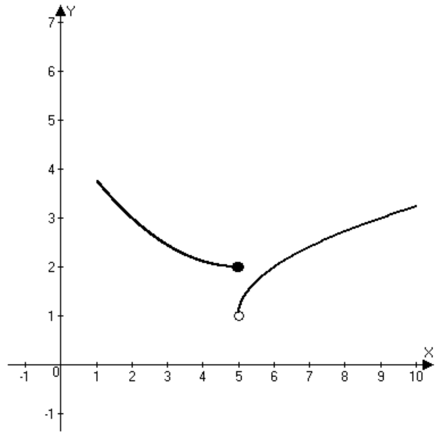
Cuando una función es continua en un punto, no hay problema: los límites laterales van a coincidir:



En el ejemplo anterior, tanto por la derecha como por la izquierda el límite en 3 es 5.

En cambio, cuando la función no es continua, no sabemos lo que va a ocurrir:

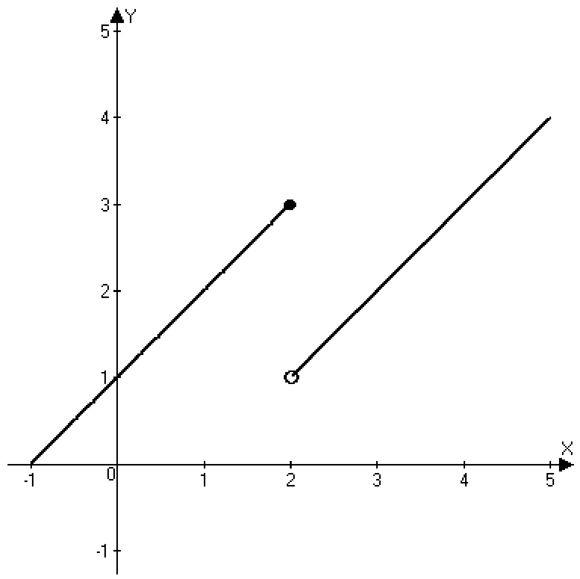




En el caso a) $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$; en cambio, en b) $\lim_{x\to 5} g(x)$ no existe.

La particularidad del apartado b) es que la función que hemos representado es una función definida a trozos y estamos calculando el límite en el punto frontera entre las dos ramas.

Cuando tengamos una función definida a trozos, en los puntos frontera de dos ramas no sabemos de antemano si va a existir o no el límite, porque los límites laterales no siempre van a coincidir:



$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$$

En el ejemplo a) el límite en el punto 3 existe porque coinciden los límites laterales; en el ejemplo b) , al ser distintos los límites laterales, no existe el límite en el punto 5.

En la primera pregunta del tema no hemos calculado los límites laterales, nos acercamos a 3 sólo por la derecha. Sin embargo, podríamos haberlo hecho.

Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

Acercándonos por la izquierda:

x	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$
1.6	3.6
1.9	3.9
1.95	3.95
1.99	3.99
1.9999	3.9999

Luego al acercarse *x* a 2 por la izquierda las imágenes se acercan a 4. Diremos que el límite por la izquierda es 4.

Acercándonos por la derecha:

x	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$
2.5	4.5
2.1	4.1
2.05	4.05
2.01	4.01
2.0001	4.0001

Luego al acercarse *x* a 2 por la derecha las imágenes se acercan a 4. Diremos que el límite por la derecha es 4.

El límite por la izquierda lo expresaremos: $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ y el límite por la derecha $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=4$

Como en este ejemplo los límites laterales coinciden, podemos decir que $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$

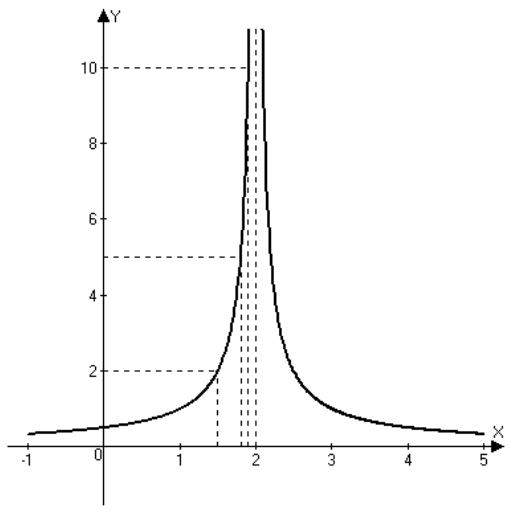
CONCLUSIÓN:

Una función tiene límite en un punto si podemos calcular los límites laterales en ese punto y además coinciden.

4. LÍMITE INFINITO

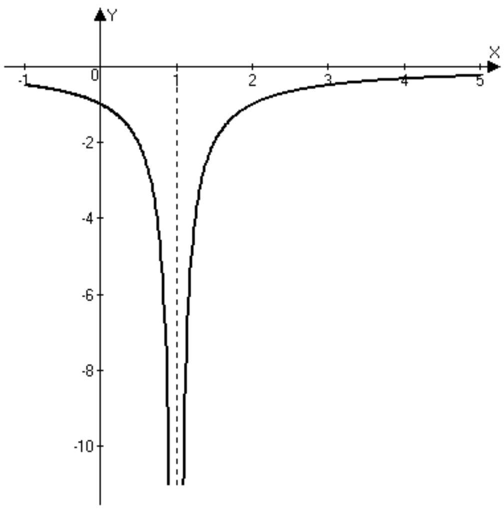
En los ejemplos que hemos visto hasta ahora al hablar de límite, el resultado ha sido un número o no coincidían los límites laterales.

En cambio, si nos fijamos en el siguiente ejemplo:

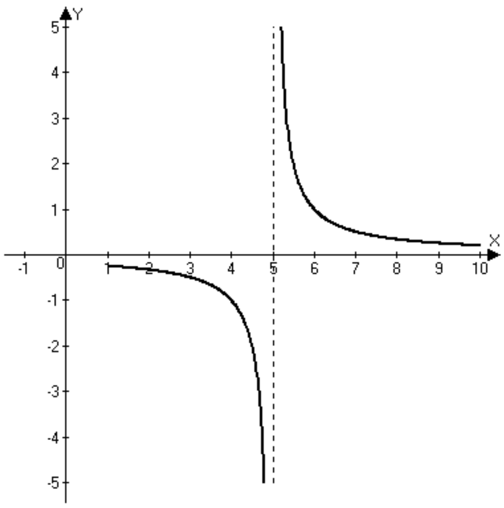


- Cuanto más cerca esté x de 2, su imagen será más grande.
- Alrededor de 2 la función no está acotada superiormente.
- Las imágenes alrededor de 2 no se acercan a ningún número, sino que cuanto más cerca esté x de 2 (tanto por su derecha como por su izquierda) mayor será su imagen.

Diremos entonces que $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$



Igualmente, diremos que $\lim_{x\to 2} g(x) = -\infty$, porque alrededor de 1 la función no está acotada inferiormente, o lo que es lo mismo, cuanto más cerca esté *x* de 1, menor será su imagen.



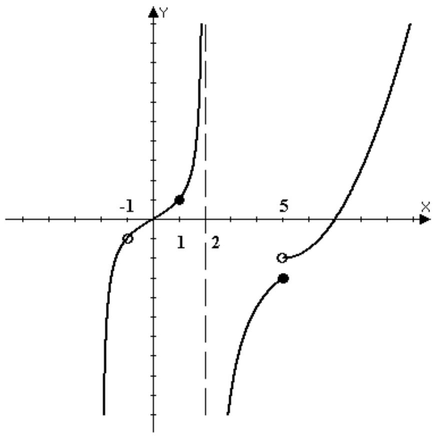
Del mismo modo, $\lim_{x\to 5} h(x) = \infty$, porque alrededor de 5 la función no está acotada ni superior ni inferiormente, esto es, cuando x se acerca a 5, su imagen o bien es cada vez mayor o cada vez menor.

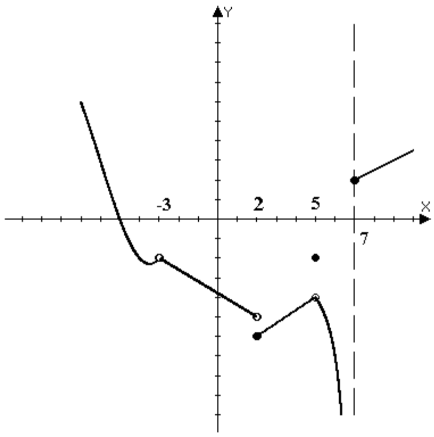
Gráficamente, podemos emplear el siguiente método para saber si en un punto, una función tiene por límite $+\infty$, $-\infty$ o ∞:

1) Si alrededor de un punto no podemos trazar una línea horizontal de manera que la gráfica quede por debajo, el límite en ese punto es $+\infty$.
2) Si alrededor de un punto no podemos trazar una línea horizontal de manera que la gráfica quede por encima, el límite en ese punto será $-\infty$.
3) Si alrededor de un punto no podemos trazar dos líneas horizontales de manera que la gráfica quede comprendida entre ellas, entonces el límite en ese punto es ∞.

Ejercicio:

Calcula el límite de las siguientes funciones en los puntos señalados:





5. CÁLCULO NUMÉRICO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

A partir de los ejemplos gráficos que hemos estudiado, podemos deducir que cuando una función es continua, entonces el límite en un punto va a coincidir con la imagen de ese punto. En este caso el límite se calculará sin más que sustituir en la expresión de la función el valor del punto en el que estamos calculando el límite. Siempre que al sustituir obtengamos un número real (no una indeterminación o un valor que no sea real) éste será el límite.

Como consecuencia, como ya conocemos las características de algunas funciones, sabemos cómo calcular el límite de estas funciones:

5.1. FUNCIONES POLINÓMICAS

Como son continuas, basta con sustituir para calcular el límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-3x+5\right)=1^2-3\cdot 1+5=1-3+5=3$$

5.2. FUNCIONES RACIONALES

Una función $f(x)$ se dice racional si es del tipo: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con *P(x)* y *Q(x)* polinómicas.

a) Si sustituimos y nos da un valor real, la función es continua. Ese valor será el límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+4}=\frac{2-1}{2+4}=\frac{1}{6}$$

b) Si al sustituir nos da $\frac{n}{0}$, siendo $n \neq 0$, esto significa que el numerador se va a ir acercando a n y el denominador a 0: cuando en una fracción el numerador se mantiene alrededor de un número y el denominador se hace cada vez más pequeño, la fracción se hace cada vez más grande: el límite va a ser $+\infty$, $-\infty$ o ∞. Para saberlo, damos valores cercanos al punto tanto a su derecha como a su izquierda.

Así, $\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-2}=\infty$, pues sustituyendo queda $\frac{2+4}{2-2}=\frac{6}{0}$, y dando valores:

x	$f(x)$
2.15	41
2.03	201

Las imágenes por la izquierda cada vez son menores, tienden a $-\infty$; y por la derecha las imágenes son cada vez mayores, tienden a $+\infty$.
Luego el límite en 2 es ∞.

c) Si al sustituir nos da $\frac{0}{0}$ **INDETERMINACIÓN**

La palabra indeterminación indica que no sabemos de antemano cuál va a ser el resultado, que dependerá de la función con la que estemos trabajando en cada caso.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Sustituyendo queda: $\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ **INDETERMINACIÓN**

Cuando nos ocurra esto, el proceso a seguir va a ser simplificar la función. Para ello tendremos que descomponer el numerador y el denominador factorizando los polinomios tal como aprendimos el curso pasado:

Factorizar x-4:

x	$f(x)$
1.8	-29
1.95	-119

Div{-4}= {l,-1,2,-2,4,-4}

Sustituimos para buscar una raíz del polinomio: $2^2-4=4-4=0$

Luego como 2 es una raíz del polinomio x^2-4, entonces $x-2$ es factor del mismo. Dividimos usando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego, quedaría:

Dividendo:	x^2-4	Divisor:	$x-2$
Cociente:	$x+2$	Resto:	0

Y, escribiendo el algoritmo de Euclides o prueba de la división:

$x^2-4=(x+2)(x-2)$. Hemos factorizado el numerador.

Como el denominador es de 1^er grado ya está factorizado, con lo que, sustituyendo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

Ejercicio:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x}{x^2-x}$

5.3. FUNCIONES RADICALES.

Como son funciones continuas, basta calcular la imagen para tener el límite:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3^2-5}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$$

Ejercicio:

Calcula $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+6}$

5.4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.

Si cada uno de los tramos de los que consta una función definida a trozos es continuo, los únicos puntos donde no sabremos si hay límite son en los que sean frontera entre dos ramas. En este caso habrá que calcular los límites laterales en ese punto para saber si coinciden.

Por ejemplo, dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-7 & si \quad x<3 \\ x-1 & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

Cuando *x* toma valores muy próximos a 3, dependiendo de si el valor elegido está a la derecha o la izquierda de 3, su imagen se podrá calcular de dos maneras distintas:

Cuando *x* está muy próximo a 3 pero a su izquierda, su imagen se calcula en $y=x^2-7$.

Si *x* está muy próximo a 3 pero a su derecha, su imagen se halla en $y=x-1$.

Esto significa que hemos de calcular los límites laterales y comprobar si coinciden:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(x-1\right)=3-1=2$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(x^2-7\right)=9-7=2$$

Luego los límites laterales coinciden. Por consiguiente, $\lim_{x\to 3} f(x)=2$

CONCLUSION:

Para saber numéricamente si una función tiene límite en el punto frontera de dos ramas de una función definida a trozos, hemos de calcular los límites laterales en ese punto y comprobar si coinciden.

Ejercicio:

Comprueba si existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ para $f(x)=\begin{cases} x-7 & si \quad x<2 \\ 5+3x & si \quad x>2 \end{cases}$

5.5. FUNCIONES EXPONENCIALES.

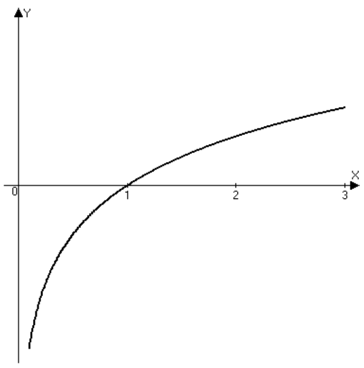
Como son continuas y su dominio son todos los números reales, basta sustituir y calcular la imagen para saber cuánto vale el límite.

Por ejemplo $\lim_{x\to 3} 2^x=2^3=8$

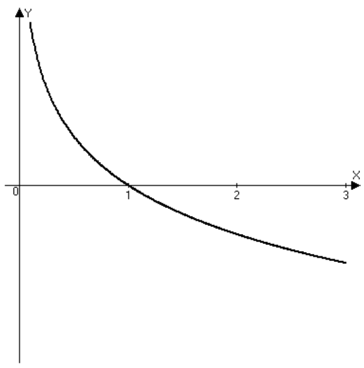
5.6. FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

Sabemos que son continuas en todo su dominio, pero éste no es $\mathbb{R}$, pues sólo existe el logaritmo de los números estrictamente positivos.

Para funciones logarítmicas simples $\left(y=\log_a x\right)$ su dominio es $D=\left(0,\to\right)=\left(0,+\infty\right)=\mathbb{R}^+$ y su gráfica:



Para $a>1$



Para $a<1$

Por tanto:

1) Como la función es continua, en todos los puntos del dominio el límite coincide con la imagen (podemos sustituir)

   Así, $\lim\limits_{x\to 100}\left(\log x\right)=\log 100=2$

2) Límite en 0:

   A partir de la gráfica podemos comprobar que:

   - Si a> 1 : $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$
   - Si a< 1 : $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty$

   También podemos calcularlo numéricamente sustituyendo:

   $\lim\limits_{x\to 0^+}\log x=-\infty$, pues con la calculadora obtenemos que:

   $\log 0'5=-0'301$ $\log 0'1=-1$
   $\log 0'05=-1'301$ $\log 0'01=-2$
   $\log 0'000003=-5'5229$

Ejercicio:

Calcula:

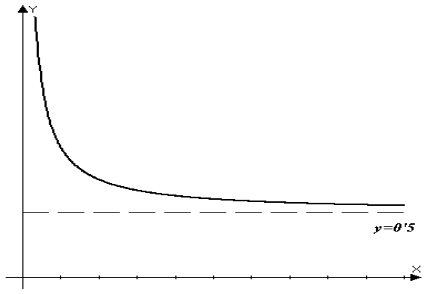
a) $\lim_{x \to 0^+} \ln x$

b) $\lim_{x \to -5^-} \log\left(x^2 - 25\right)$

¿Hay algo contradictorio en el ejercicio?

6. TENDENCIAS.

Ya hemos estudiado la tendencia de una función a partir de su gráfica. Sabemos que una función tiene tendencia a acercarse a un número cuando al aumentar cada vez más la variable independiente las imágenes se acercan a ese número. Esto gráficamente se reflejaba en que la gráfica de la función se iba acercando cada vez más a una recta horizontal cuanto mayor era la variable independiente.



En la gráfica de la figura la tendencia es 0’5. ¿Por qué? Porque cuanto mayor sea el tiempo, más cerca estará su imagen de 0’5, y más se irá acercando la gráfica a la recta $y = 0'5$. Démonos cuenta que la gráfica se acerca cada vez más a la recta, pero no llega a unirse completamente con ella.

Vamos a ver cómo podemos estudiar la tendencia cuando lo que tenemos es la expresión analítica de la función y no su gráfica. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Habrá tendencia cuando al aumentar los valores de la variable independiente las imágenes se acerquen a algún número. Hacemos una tabla en la que vamos dando a *x* valores cada vez más grandes para ver qué ocurre.

x	5	10	15	20	50	100
y	1’5	1’72	1’81	1’85	1’94	1’97

Observamos que cuanto mayor sea *x*, más cerca estará su imagen de 2. Por tanto la tendencia es acercarse a la recta $y = 2$.

Nótese que las imágenes se acercan a 2 tanto como queramos pero nunca llegan a ser 2.

Si $x = 1000$, entonces $y = \frac{2 \cdot 1000 - 1}{1000 + 1} = \frac{1999}{1001} = 1'997$

Escribiremos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$

Y diremos que la recta $y = 2$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de la f unción.

Por tanto, hablar de que una función presenta una asíntota horizontal es equivalente a decir que hay una tendencia, pues dicha tendencia la da precisamente la asíntota: Si $y = 2$ es una asíntota horizontal significa que la tendencia de la función es que cuanto mayor sea la variable independiente, la gráfica estará más cerca de la recta $y = 2$, o lo que es lo mismo, las imágenes se van acercando a 2 todo lo que queramos al ir aumentando el valor de la variable *x*.

En el ejemplo anterior, hemos estudiado la tendencia en $+\infty$, pero también puede hacerse en $-\infty$, es decir, cuando damos a la variable *x* valores cada vez más pequeños (negativos, pero cada vez mayores en valor absoluto).

Ejemplo: Tendencia de la función $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

Construimos una tabla tanto para valores de *x* que se acercan a $+\infty$ como para los que se acercan a $-\infty$:

x	10	50	100	1000	5000	10000
y	1’46	1’86	1’93	1’99	1’998	1’9995

x	-20	-100	-200	-1000
y	2’41	2’072	2’03	2’007

Luego la tendencia en ambos casos es acercarse a 2. $y = 2$ es una asíntota horizontal. Podemos escribir que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x+3} = 2 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x+3} = 2$$

No todas las funciones tienen asíntotas horizontales (no presentan tendencia), por ejemplo la función $g(x) = 2x + 5$:

Si hacemos una tabla resulta:

x	5	20	30	50	100	500

$y=2x+5$	15	45	65	105	205	1005

Las imágenes no se acercan a ningún valor.

Ejercicio:

Comprueba si la función $f(x)=\dfrac{6x-4}{2x+8}$ presenta tendencia.

Regla:

1) Las funciones polinómicas no tienen asíntotas horizontales.

2) Las funciones racionales:

   a) Si el grado del numerador es mayor que el del denominador., no hay asíntota horizontal.
   b) Si el grado del numerador es igual al del denominador, entonces la tendencia es acercarse al cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado del numerador y del denominador.
   c) Si el grado del numerador es menor que el del denominador entonces la tendencia es acercarse a cero.

3) Las funciones exponenciales tienen por asíntota horizontal a la recta $y=0$ (el eje *X*) pues:

   a) si $a>1$ entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

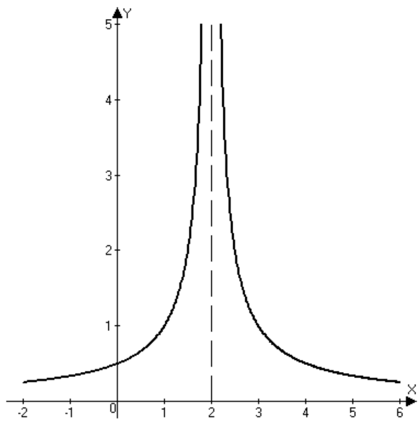
   b) si $0<a<1$ entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$

Ejercicio:

Indica por dos métodos distintos si las siguientes funciones presentan tendencia y trata de relacionar los dos métodos empleados:

a) $f(x)=\dfrac{8x-1}{4x+1}$ b) $g(x)=\dfrac{x^2-6x}{3x+2}$ c) $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$

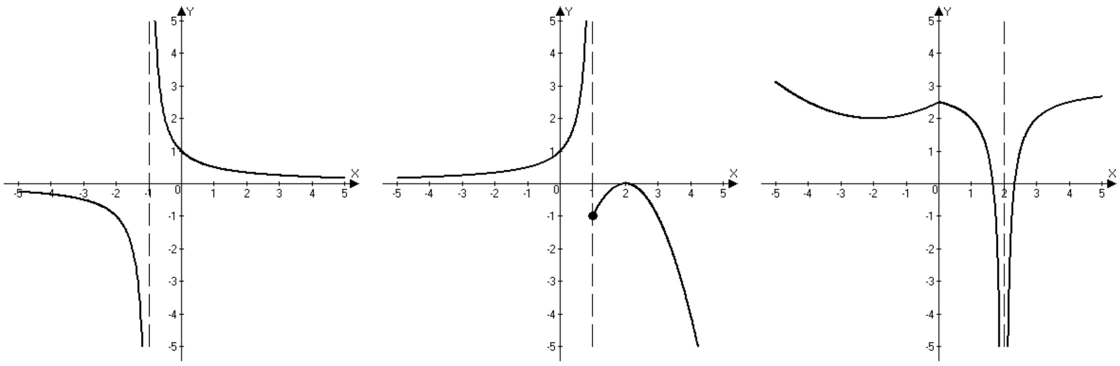
7. ASÍNTOTAS VERTICALES.



Al estudiar gráficamente el comportamiento de una función, hemos observado que a veces en algunos puntos el límite era ∞. Alrededor de estos puntos la función no está acotada y la gráfica se va acercando a una recta vertical cuanto más cerca esté x de dicho punto. En el ejemplo de la figura, cuanto más cerca esté x de 2 mayor será su imagen y más cerca estará la gráfica de la recta $x = 2$. Diremos entonces que la recta $x = 2$ es una **asíntota vertical** de la función.

Ejercicio:

Indica las asíntotas verticales de las siguientes funciones:



También podemos comprobar analíticamente si una función posee asíntota vertical en algún punto:

Por ejemplo, sea la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 9}$

Vamos a ver qué ocurre cuando tomamos valores próximos a 3.

Hacemos una tabla en la que tomamos valores cada vez más próximos a 3 y comprobamos qué le ocurre a las imágenes.

x	4	3,5	3,2	3,1	3.01	3,001
$y = \dfrac{2}{x^2 - 9}$	0,28	0,61	1,61	3,27	33,27	333,27

Cualquier número cercano a 3 tiene imagen, y cuánto más cerca esté x de 3, mayor será su imagen. La función no está acotada superiormente a la derecha de 3.

También podemos acercarnos a 3 con números más pequeños. Veamos qué ocurre:

x	2	2’6	2’9	2’95	2’99	2’998
y	-0’4	-0’89	-3’38	-6’72	-33’38	-166’72

Cuanto más nos acercamos a 3 por su izquierda, más pequeñas son las imágenes. La función no está acotada inferiormente a la izquierda de 3.

Diremos entonces que $\lim_{x\to 3} \dfrac{2}{x^2-9} = \infty$

Y en el punto $x=3$ diremos que hay una asíntota vertical.

¿Qué funciones pueden tener asíntotas verticales?

1) Las racionales: Si las tienen, será en los puntos que hacen 0 el denominador.
2) Las logarítmicas: En los puntos en que nos quede $\log 0$ al sustituir.

Los puntos que son candidatos a presentar asíntotas verticales son aquellos en los que haya alguna "anomalía": que dé 0 el denominador, que quede una expresión que no exista ($\log 0$)... Luego cuando una función tenga por dominio a $\mathbb{R}$, o sea continua,... evidentemente no va a presentar asíntotas verticales.

Ejercicio:

Sin representar gráficamente, indica razonadamente si las siguientes gráficas poseen alguna asíntota vertical, y en el caso que así sea, di cual es:

a) $y = x^2 - 7x$

b) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$

c) $f(x) = e^x$

d) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

e) $h(x) = \log(x+3)$

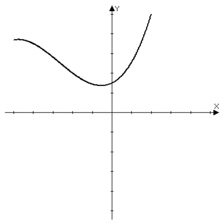
f) $y = \ln(2x)$

g) $y = \dfrac{x-3}{x^2-5}$

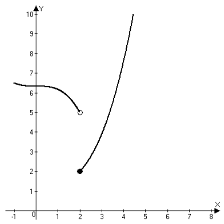
8. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

8.1. IDEA INTUITIVA.

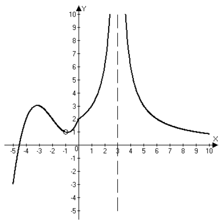
Ya sabemos que, dada la gráfica de una función, ésta es discontinua en los puntos donde dicha gráfica se interrumpe. Así, en los siguientes casos:



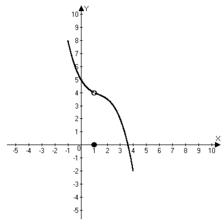
a



b



c



d

La función del apartado "a" es continua (en todo su dominio). La función "b" es discontinua en $x = 2$. La función "c" es discontinua en $x = -1$ y $x = 3$. La función "d" es discontinua en $x = 1$.

Ahora lo que intentamos es, a partir de la expresión analítica, saber en qué puntos es continua una función. Para ello vamos a fijarnos en las "anomalías" que presentan las funciones anteriores en los puntos de discontinuidad:

a. En la función "b", no existe el límite en $x = 2$ (por no coincidir los límites laterales)
b. En la función "c", en el punto $x = -1$ existe el límite pero no la imagen; en $x = 3$ el límite es $+\infty$.
c. En la función "d", en $x = 1$ existen el límite y la imagen de 1 pero no coinciden ($\lim_{x \to 1} f(x) = 4$ y $f(1) = 0$)

A partir de esto, podemos establecer la siguiente definición:

8.2. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO.

Una función es continua en un punto x_0 si:

1) Existe la función en ese punto (x_0 tiene imagen) .
2) Existe el límite en ese punto:
   i) Existen los límites laterales y coinciden.
   ii) Es un número real.
3) El límite y la imagen coinciden.

De las funciones que hemos estudiado hasta ahora, sólo presentan problemas de continuidad las racionales y las definidas a trozos; el resto son siempre continuas (en su dominio)

Así, son funciones continuas las polinómicas, las radicales, las exponenciales, las logarítmicas, las funciones seno y coseno , las de valor absoluto,...

Veamos unos ejemplos de funciones problemáticas:

a. Racionales:
   De haber algún problema, será en los puntos que hagan 0 el denominador ($\frac{a}{0}$ no existe). Veamos algunos ejemplos:

   1) $f(x) = \dfrac{x-13}{x^2+1}$
   El denominador no se anula nunca ($x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real) por lo que esta función está definida y es continua en $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$

En $x=1$ no hay imagen, ya que $f(1)=\dfrac{1-3}{1-1}=\dfrac{-2}{0}$ no existe, luego la función no es continua en este punto.

3) $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

En este caso el denominador se anula para $x=2$, luego en este punto no hay función. $g\left(2\right)=\dfrac{4-4}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ no existe y, por tanto, $g(x)$ no es continua en $x=2$.

Pero hay una diferencia fundamental entre ambas:

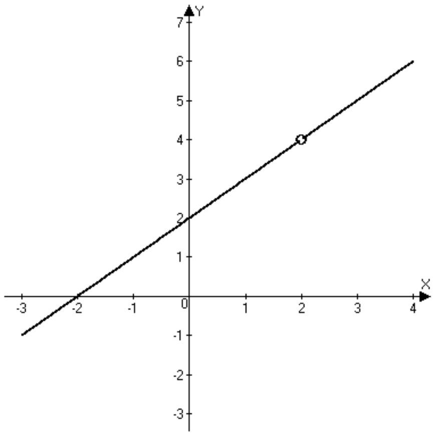
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x-1}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$ (resolviendo la indeterminación $\dfrac{0}{0}$: $x^2-4=\left(x+2\right)\left(x-2\right)$ y queda: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x+2\right)=4$)

En un caso no existe el límite (es ∞, no un número real) mientras que en el otro si existe el límite.

Cuando no existe la imagen en un punto pero si el límite en ese punto, diremos que la función presenta una discontinuidad EVITABLE en dicho punto.

Esto es debido a que la función es "casi" continua. Si representamos la función $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, su gráfica es



Como vemos, lo único que le falta a esta función para ser continua es que x=2 tenga imagen. Es decir., si a la función anterior le añadimos que la imagen de 2 sea 4 (es decir, en la gráfica rellenamos el punto) la función pasa a ser continua.

Por consiguiente, la función $G(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ 4 & si \quad x=2 \end{cases}$ sólo se diferencia de $g(x)$ en que le hemos añadido la imagen a $x=2$ y con esto la hemos convertido en continua.

CONCLUSIÓN:

Cuando en un punto una función no sea continua pero el límite sea un número real, se presenta una **discontinuidad evitable,** de manera que asignando como imagen de ese número el valor del límite hemos construido una función idéntica a la anterior, sólo que la hemos hecho continua dando imagen al número que no la tenía.

Ejercicio:

¿Cuál de las siguientes funciones presenta una discontinuidad evitable?

a) $f(x)=\dfrac{x^2-6x}{x-1}$

b) $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

b. Funciones definidas a trozos:

Si cada una de las ramas de la función es continua, el único punto donde no sabremos qué ocurre es el punto frontera entre las dos ramas. Para estudiar la continuidad en dicho punto seguiremos los 3 pasos que debe cumplir una función para ser continua.

Veámoslo con un ejemplo: $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x<5 \\ x^2-16 & si \quad x\geq 5 \end{cases}$

Como las dos ramas son polinómicas, cada una de ellas es continua. Nos falta saber si en el punto $x=5$ las dos ramas se unen o por el contrario hay una discontinuidad.

Para que $f(x)$ sea continua en $x=5$ se debe cumplir:

1) $\exists f(5)$
2) $\exists \lim_{x\to 5} f(x)$. Habrá que comprobar si existen y coinciden los límites laterales:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \left(2x-1\right) = 2\cdot 5-1 = 10-1 = 9$$
$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \left(x^2-16\right) = 5^2-16 = 25-16 = 9$$

Como los límites laterales existen y coinciden podemos decir que $\exists \lim_{x\to 5} f(x)$ y que $\lim_{x\to 5} f(x) = 9$

3) $f(5) = \lim_{x\to 5} f(x)$.

Como la imagen coincide con el límite, la función es continua en x=5.

Ejercicio:

Estudia analíticamente la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x \le 0 \\ x^2+1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x-3 & si \quad x \ge 2 \\ x-1 & si \quad x < 2 \end{cases}$

Advertencia:

A la hora de estudiar la continuidad de una función definida a trozos hay que tener en cuenta si en algún punto que no sea el de la frontera la función no es continua y falla alguna condición.

Ejercicio:

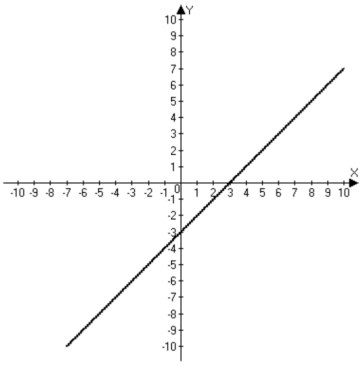
Decide si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) La función $f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x < 2 \\ x^2-3 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$ no es continua en $x = 2$

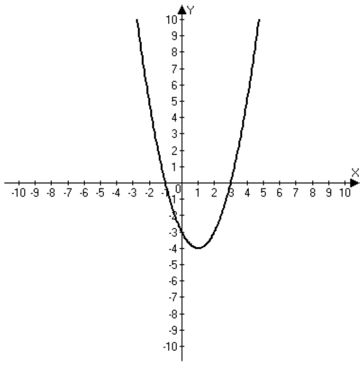
b) La función $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & si \quad x \ge 0 \\ -\cos x & si \quad x < 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$ y discontinua en $x = 1$

8.3. EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS.

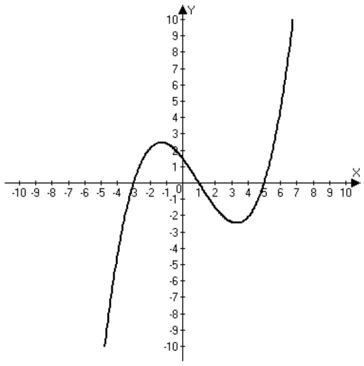
A) POLINOMICAS



De primer grado

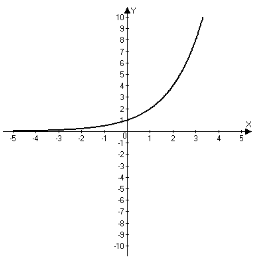


De segundo grado

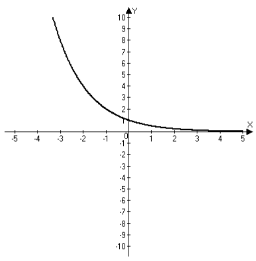


De tercer grado

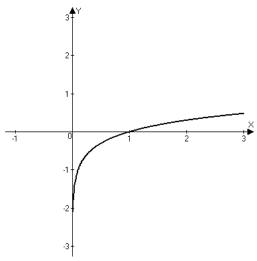
B) EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



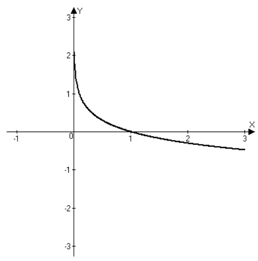
Exponencial (Base>1)



Exponencial (Base<1)

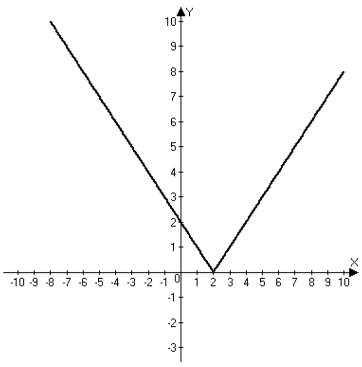


Logarítmica (Base >1)

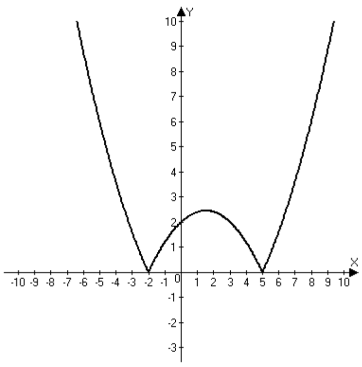


Logarítmica (Base <1)

C) VALORES ABSOLUTOS

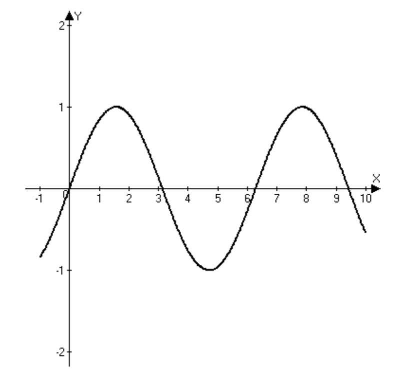
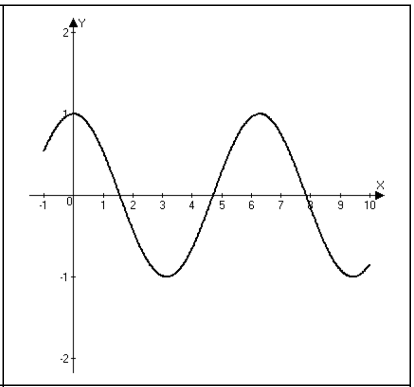


Valor absoluto de función lineal

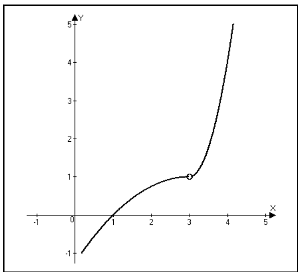
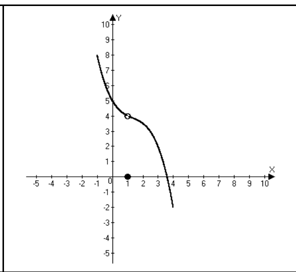
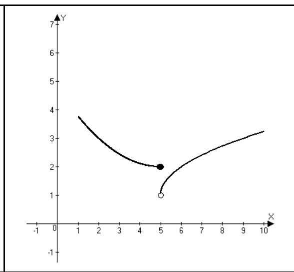
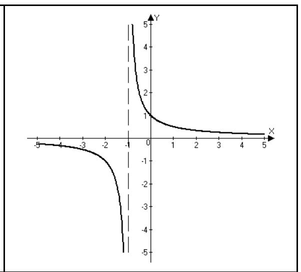


Valor absoluto de función cuadrática

D) TRIGONOMÉTRICAS

	
Función seno	Función coseno

8.4. EJEMPLOS DE FUNCIONES CON DISCONTINUIDADES.

			
Evitable	Evitable	Inevitable de salto finito	Inevitable de salto finito

Ejercicio:

a. ¿Sabrías evitar la discontinuidad en los dos primeros ejemplos?
b. ¿Qué indica el salto?

8.5. ESTUDIO DE LA DISCONTINUIDAD A PARTIR DE PARÁMETROS.

Si nos fijamos en los ejemplos de funciones definidas a trozos en los que hemos estudiado la continuidad en los puntos frontera, resulta que dependiendo del valor de los límites laterales la función va a ser continua o no. Si en alguna de las expresiones aparece un parámetro, esto es, una constante, dependiendo del valor que le demos la función podrá ser continua o discontinua. Veámoslo con un ejemplo:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & si \quad x \geq 1 \\ ax+3 & si \quad x < 1 \end{cases}$

Dependiendo del valor que demos a "*a*", la función podrá o no ser continua. Para que lo sea deberá cumplir los 3 puntos requeridos.

1) $\exists \ f(1) : f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Se verifica.

2) $\exists \lim_{x\to 5} f(x)$: Deberán existir los límites laterales y coincidir:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(2x-1\right) = 2\cdot 1-1 = 2-1 = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(ax+3\right) = a\cdot 1+3 = a+3$

Los límites laterales existen. Para que coincidan habrá de darse que $1 = a+3$; de donde se deduce que $a = 1-3 = -2$

Luego para $a = -2$ los límites laterales coinciden y por tanto $\exists \lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

3) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$.

Para $a = -2$ el límite vale 1 y coincide con la imagen, luego se verifica.

En consecuencia, $f(x)$ será continua en $x = 1$ si $a = -2$, y discontinua si $a \neq -2$

Ejercicio:

Estudia la continuidad a partir del parámetro:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & si \quad x < 2 \\ \dfrac{2x-1}{x+1} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

9. REPRESENTACIÓN APROXIMADA DE FUNCIONES.

Estudiando en una misma función una serie de características (la tendencia, asíntotas verticales, dominio, puntos de corte con los ejes,....) podemos tener una idea aproximada de la gráfica de dicha función y podremos deducir sus características principales.

9.1. FUNCIONES POLINÓMICAS.

Ya sabemos representar funciones lineales (su gráfica es una recta) y cuadráticas (su gráfica es una parábola). Vamos ahora a esbozar la gráfica de las funciones polinómicas de tercer grado. Vamos a hacerlo a partir de un ejemplo, pues bastará con seguir siempre esos pasos para tener una aproximación a la gráfica de la función.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

1) El dominio es $\mathbb{R}$, por lo que la gráfica va a ocupar toda la recta real.

2) Además toda función polinómica es continua, se va a poder dibujar en un solo trazo.

3) Puntos de corte con los ejes:

Con OX: $y=0$

Tenemos que resolver la ecuación $x^3+3x^2-x-3=0$. Corno es de tercer grado, hemos de descomponer el polinomio. Aplicamos la regla de Ruffini: $Div(-3)=\{1,-1,3,-3\}$.

$1^3+3\cdot 1^2-1-3=1+3-1-3=0$; por tanto $x=1$ es una raíz del polinomio, es decir, una solución de la ecuación. Para hallar las restantes raíces (recordemos que un polinomio de tercer grado tiene como máximo tres raíces reales) dividimos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \lfloor 0 \end{array}$$

Aplicando el algoritmo de Euclides: $x^3+3x^2-x-3=(x-1)(x^2+4x+3)$

Para hallar las posibles dos raíces que nos faltan basta con resolver $x^2+4x+3=0$

Como es una ecuación de 2º grado, aplicando la fórmula correspondiente obtenemos como soluciones $x=-1$, $x=-3$.

Por tanto los puntos de corte con el eje *OX* son $(1,0)$, $(-1,0)$ y $(-3,0)$

Con OY: $x=0$

$y(0)=0^3+3\cdot 0^2-0-3=-3$ el punto de corte es $(0,-3)$

4) Asíntotas verticales:

Corno $D(f)=\mathbb{R}$, no puede haber asíntotas verticales en las funciones polinómicas.

5) Asíntotas horizontales - tendencia:

Las funciones polinómicas no presentan asíntotas horizontales porque al aumentar *x* también aumenta la imagen indefinidamente. Lo que puede variar es el signo (positivo o negativo), de manera que las imágenes pueden crecer hacia $+\infty$ o decrecer hacia $-\infty$.

Para saberlo basta tomar un valor “grande” de *x* y calcular su imagen y lo mismo para otro “pequeño”.

Por ejemplo $f(100)=100^3+3\cdot 100^2-100-3=1000000+30000-100-3=1.029.903$

Cuando $x\to+\infty$, $y\to+\infty$

$f(-100)=(-100)^3+3\cdot(-100)^2-(-100)-3=-1000000+30000+100-3=-969.897$

Cuando $x\to-\infty$, $y\to-\infty$

6) Signo de la función:

Una función polinómica puede ser positiva en unos intervalos y negativa en otros. Para saberlo, una vez que hemos calculado los puntos de corte con el eje OX dividimos la recta real en intervalos a partir de dichos puntos y tomando un número en cada intervalo, comprobamos si la función es positiva o negativa en cada tramo:

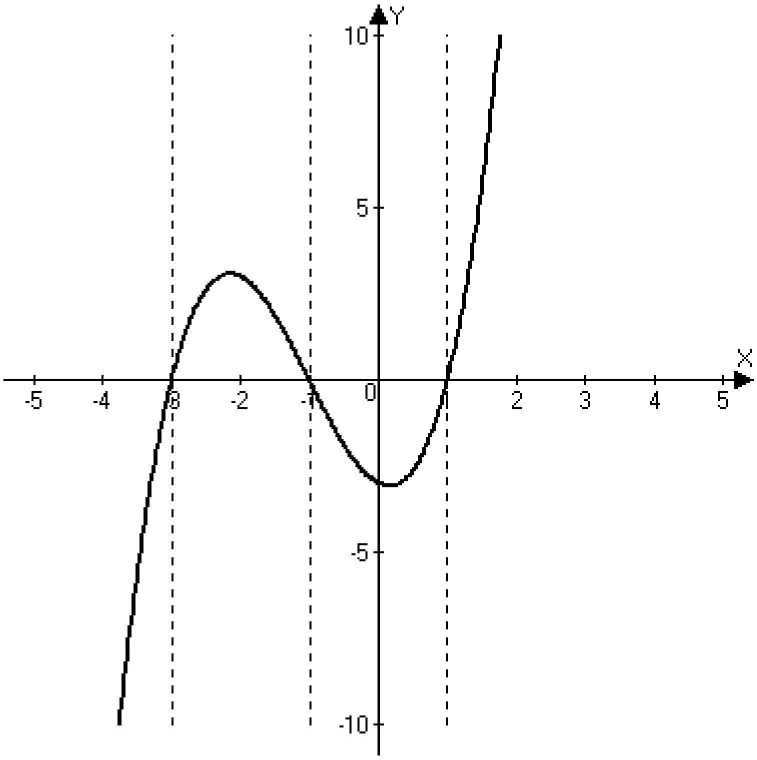
Como los puntos de corte con OX son $(1,0)$, $(-1,0)$ y $(-3,0)$, las regiones son $(-\infty,-3)$, $(-3,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,+\infty)$

Para comprobar cuál es el signo en cada región podemos construir la siguiente tabla:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
	-4	-2	0	2
$y=x^3+3x^2-x-3$	-15	3	-3	15

Por tanto, la función es positiva en $(-3,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-3)\cup(-1,1)$

Teniendo en cuenta todos los cálculos realizados anteriormente, la gráfica de esta función es, aproximadamente:



Hemos de darnos cuenta que entre los puntos de corte la función ha de tener extremos relativos para poder pasar de manera continua de unos a otros teniendo en cuenta el signo de la función en cada intervalo. Además, nótese como se cumple que no hay tendencia.

9.2. FUNCIONES RACIONALES SENCILLAS.

Veamos cómo las representamos a partir de la función $f\left(x\right)=\dfrac{2x-4}{x+2}$

1) El dominio es $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, luego la gráfica ocupará toda la recta real excepto este punto, que al hacer 0 el denominador es candidato a que por él pase una asíntota vertical.

2) Por este motivo, la función es continua en $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

3) Puntos de corte con los ejes:

Con OX: $y=0$

Nos queda $0=\dfrac{2x-4}{x+2}\Rightarrow 2x-4=0\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=\dfrac{4}{2}=2$

El punto de corte es el punto $\left(2,0\right)$

Con OY: $x=0$

Nos queda $y=\frac{2\cdot 0-4}{0+2}=\frac{-4}{2}=-2$

El punto de corte es el punto $\left(0,-2\right)$

4) Asíntotas verticales:

El único punto que no pertenece al dominio es el que hace 0 el denominador.
$x+2=0\Rightarrow x=-2$
Veamos si al acercarnos a -2 las imágenes crecen indefinidamente:

x	-3	-2’5	-2’1	-2’05	-2’01
y	$\frac{-10}{-1}=10$	$\frac{-9}{-0`5}=18$	$\frac{-8'2}{-0'1}=82$	$\frac{-8'1}{-0'05}=162$	$\frac{-8'01}{-0'01}=801$
x	-1	-1’5	-1’8	-1’9	-1’98
y	$\frac{-6}{1}=-6$	$\frac{-7}{0'5}=-14$	$\frac{-7'6}{0'2}=-38$	$\frac{-7'8}{0'1}=-78$	$\frac{-7'96}{0'02}=-398$

Luego cuando *x* se acerca a -2 por la izquierda (con valores próximos a -2 pero más pequeños), las imágenes son cada vez mayores (la función crece indefinidamente); cuando x se acerca a -2 por la derecha (con valores próximos a -2 pero mayores), las imágenes son cada vez más pequeñas (la función decrece indefinidamente).

Diremos entonces que $\lim_{x\to -2}\frac{2x-4}{x+2}=\infty$

5) Asíntota horizontal - tendencias:

Como el numerador y el denominador tienen el mismo grado, la función tiene límite en el infinito y existe tendencia. Además, fijándonos en los coeficientes de mayor grado del numerador y del denominador resulta que la tendencia es $\frac{2}{1}=2$.

Por tanto $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-4}{x+2}=2$ y $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-4}{x+2}=2$

Este resultado también lo podríamos haber obtenido construyendo una tabla de valores en la que diésemos a *x* valores muy grandes y muy pequeños y comprobásemos a qué se acercaban las imágenes.

6) Signo de la función:

Cuando tengamos una función que posea asíntotas verticales, para determinar las regiones de la gráfica, además de considerar los puntos de corte con el eje OX hay que tomar también el punto en el que se encuentre la asíntota vertical.

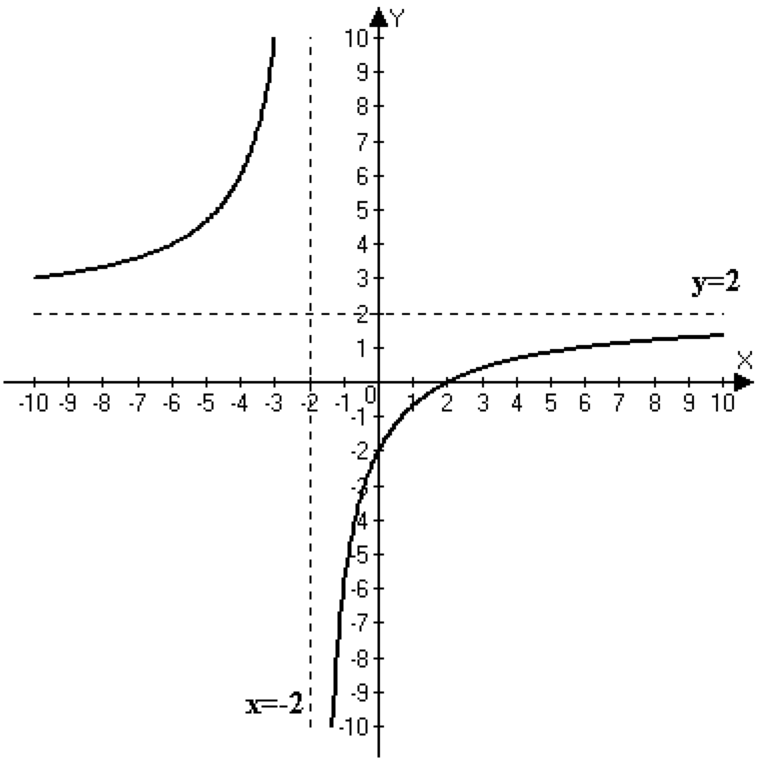
Por tanto en este caso, las regiones son $\left(-\infty,-2\right)$, $\left(-2,2\right)$ y $\left(2,+\infty\right)$.

Construyendo una tabla y dando valores:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
x	-3	0	3
$y=\dfrac{2x-4}{x+2}$	10	-2	$\dfrac{2}{5}$

Por tanto, la función es positiva en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y negativa en $(-2,2)$

Con todos estos datos podemos esbozar la gráfica de la función:



9.3. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.

9.3.1. DEFINICIÓN.

Dentro de las funciones racionales existe un tipo que denominamos de proporcionalidad inversa porque están asociadas a fenómenos en los que las variables aparecen relacionadas inversamente: cuando la variable independiente se hace doble, la dependiente pasa a ser la mitad, si la independiente se triplica, la dependiente se convierte en la tercera parte, etc.

Ejemplo 1:

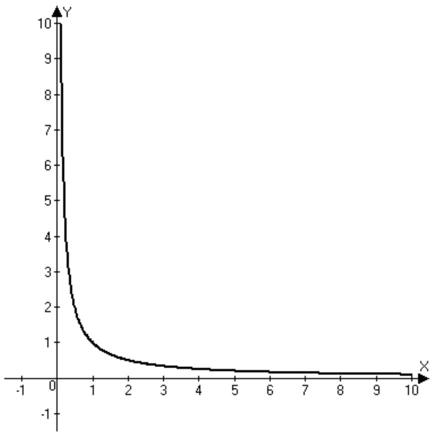
El producto de dos números x e y es 1. ¿Qué valores pueden tomar dichos números? ¿Puedes obtener una gráfica que contenga a estos pares de números?

Los números x e y cumplen que $x \cdot y = 1$, es decir, $y = \frac{1}{x}$. Para conocer todos los puntos y su representación gráfica, empezamos estudiando esta función siguiendo estos pasos:

1) Construimos una tabla dando a x valores positivos:

x	0'2	0'5	1	2	5	10
y	5	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

2) Los representamos gráficamente; como las variables son continuas podemos unir los puntos:



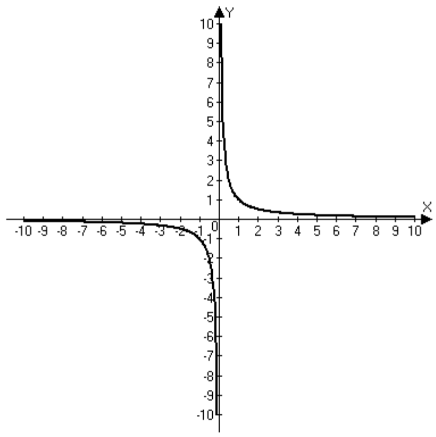
3) Analizamos la gráfica y observamos:

- La función no tiene sentido para el valor $x = 0$. Este punto no pertenece al dominio.
- Todos los puntos se encuentran situados en el primer cuadrante.
- Es decreciente. Al aumentar el valor de x, disminuye el valor de y.
- Cuando los valores de x se hacen muy grandes, los de y se hacen muy pequeños (próximos a 0). Luego la tendencia en $+\infty$ es 0. El eje X es una asíntota horizontal.
- Cuando los valores de x se aproximan a 0, los valores de y se hacen muy grandes (el límite cuando x tiende a 0 por la derecha es $+\infty$). En $x = 0$ hay una asíntota vertical.

- La función es inversible, podemos intercambiar los valores de *x* e *y*, puesto que las imágenes no se repiten.

4) Si damos ahora valores negativos a *x*, calculamos su imagen y representamos estos puntos gráficamente, observamos:

x	-0’2	-0’5	-1	-2	-5	-10
y	-5	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$

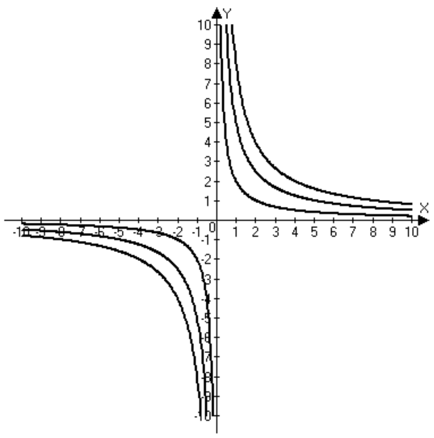


Obtenemos una nueva rama simétrica a la anterior con respecto al origen de coordenadas. En este tramo la función es decreciente. Además podemos observar que en su conjunto, la función es continua, excepto en x=0, donde presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

La figura formada por estas dos ramas se denomina hipérbola equilátera, y su gráfica está asociada a todos los problemas de proporcionalidad inversa.

Si en lugar de la función y=1/x representamos funciones del tipo y=k/x, como y=2/x, y=3/x, ... obtenemos gráficas de la misma forma pero que decrecen más lentamente.

Nótese que estas funciones no cortan a los ejes coordenados. ¿A qué es debido?



Las funciones del tipo $y = \frac{k}{x}$ (con $k > 0$) se denominan funciones de proporcionalidad inversa. Su gráfica se denomina hipérbola, y tiene dos ramas, una en el primer cuadrante y otra en el tercero.

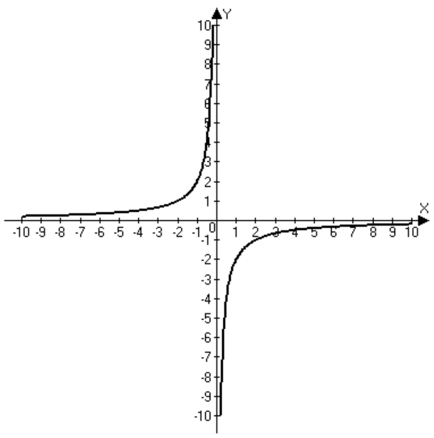
¿Qué ocurre cuando *k* es negativo?

Consideremos la función $y = \frac{-2}{x}$.

Construimos una tabla que incluya valores positivos y negativos (no incluimos el 0, donde sabemos que existe una asíntota vertical, por tanto daremos valores cercanos a 0 para comprobar el signo del límite en 0):

x	-10	-5	-1	-0’5	-0’2	0’2	0’5	1	5	10
y	0,2	0,4	2	4	10	-10	-4	-2	-0,4	-0,2

La gráfica es ahora:



La función tiene las siguientes características:

- Sigue siendo continua excepto en 0, donde posee una asíntota vertical.
- Es simétrica respecto al origen.
- Es creciente.
- Las ramas están situadas en el segundo y cuarto cuadrantes.
- La tendencia es acercarse a 0 (el eje horizontal es una asíntota horizontal tanto en $+\infty$ como en $-\infty$

Ejercicio:

Sobre unos mismos ejes cartesianos representa las siguientes funciones y compara su gráfica:

a) $y=\dfrac{3}{x}$ b) $y=\dfrac{4}{x}$ c) $y=\dfrac{-3}{x}$ d) $y=\dfrac{-4}{x}$

9.3.2. APLICACIONES DE LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.

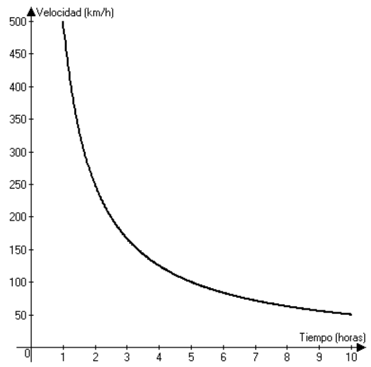
Existen situaciones en las que se relacionan dos variables de manera que cuando una de ellas se duplica, la otra queda reducida a la mitad, o cuando una se triplica, la otra queda dividida por tres. Todas estas relaciones se denominan de proporcionalidad inversa.

Ejemplo 1:

Una persona debe realizar un viaje de 500 km. Construimos una tabla en la que se relacionan el tiempo y la velocidad, teniendo en cuenta que $e=v\cdot t$. En este caso $500=v\cdot t$, es decir, $v=\dfrac{500}{t}$):

t (horas)	4	5	6	7	8	9	10
v(km/h)	125	100	83’3	71’43	62’5	55’6	50

Observa que si el tiempo se duplica (de 5 horas a 10 horas) la velocidad queda reducida a la mitad (de 100 km/h a 50 km/h). La gráfica es:



La gráfica que se obtiene corresponde a una función de proporcionalidad inversa. Sólo presenta una rama porque no tiene sentido hablar de tiempo y velocidad negativos.

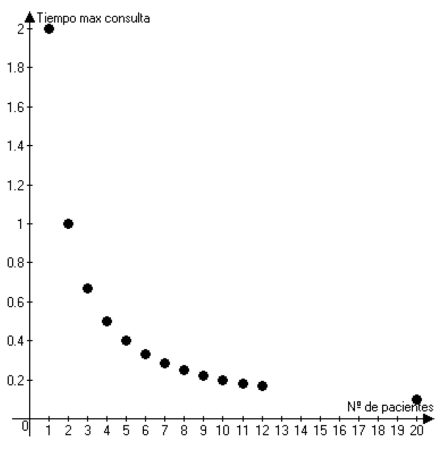
Ejemplo 2:

Un médico de la seguridad social dispone de dos horas para pasar consulta. Si a la consulta asiste un sólo paciente, le podrá dedicar dos horas; si asisten dos pacientes, podrá dedicar una hora a cada uno; si asisten cuatro, media hora a cada uno,...

Suponiendo que todas las consultas tengan la misma duración, podemos establecer la siguiente relación en forma de tabla, teniendo en cuenta que se cumple que *número de pacientes * tiempo de consulta = 2 horas*:

nº de pacientes	1	2	3	4	5	6	...	60
tiempo máximo de consulta	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{30}$

Se trata, por tanto, de una relación de proporcionalidad inversa. Si llevamos estos valores sobre los ejes coordenados, obtenemos la siguiente gráfica:



La gráfica es similar a las de las funciones de proporcionalidad inversa estudiadas, pero, por la naturaleza del problema, las variables son discretas, por lo que la gráfica es discontinua.

Ejercicio:

Un depósito de 1000 litros se puede llenar con un solo grifo en 10 horas. ¿En cuánto lo llenarán dos grifos del mismo caudal? ¿Y cuatro? ¿Y diez?

Construye una tabla de valores, representa la función gráficamente y calcula la expresión analítica de la función. A partir de esta, expresa en minutos y segundos cuanto tiempo tardarán quince grifos en llenar el depósito.

9.4. FUNCIONES RADICALES DEL TIPO $f(x) = \pm\sqrt{px+q}$.

Vamos a construir la gráfica de funciones radicales en las que el radicando es un polinomio de 1er grado. Para ello seguiremos las indicaciones expresadas a nivel general:

1) Dominio:

   La función tendrá sentido cuando el radicando sea positivo o cero, ya que sabemos que las únicas raíces cuadradas que no podemos calcular serán aquellas en las que obtengamos un número negativo en el radicando. Por tanto, para calcular el dominio, tendremos que comprobar cuándo $px+q \geq 0$

2) Continuidad:

   La función va a ser continua en el intervalo en el que esté definida.

3) Puntos de corte con los ejes:

   Sustituimos x por 0 e y por 0 para calcular donde corta al eje Y y donde al eje X.

4) Asíntotas verticales:

   Como el dominio empieza siempre en el extremo de un intervalo cerrado, el límite en este extremo va a ser un número (la función es continua), luego no habrá asíntota vertical en ningún punto.

5) Asíntota horizontal - tendencia:

   Tampoco va a existir, porque el límite en el ∞ va a ser ∞

6) Signo de la función:

La función es positiva, la gráfica va a estar siempre por encima del eje horizontal.

Ejemplo:

Gráfica de la función $f(x)=\sqrt{3x+12}$

1) Dominio: Hay que calcular cuando es positivo el radicando, es decir, que $3x+12\geq 0$.

   Para resolver esta inecuación, igualamos a 0 y construimos una tabla con los intervalos obtenidos a partir del resultado de la ecuación, dando valores a continuación en cada intervalo para comprobar en qué tramo existe imagen.

   $$3x+12=0\Rightarrow 3x=-12\Rightarrow x=\frac{-12}{3}=-4$$

   Los intervalos son $(-\infty,-4)$ y $(-4,+\infty)$. Comprobamos dónde existe imagen:

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,+\infty)$
x	-5	-4	-1
$3x+12$	$3(-5)+12=$ $=-15+12=-3$	$3(-4)+12=$ $=-12+12=0$	$3(-1)+12=$ $=-3+12=9$
$\sqrt{3x+12}$	$\sqrt{-3}$ NO EXISTE	$\sqrt{0}$ EXISTE	$\sqrt{9}=3$ EXISTE

   Por tanto, el dominio es el intervalo $[-4,+\infty)$

   Nótese que hay números negativos que tienen imagen porque el radicando queda positivo:

   si $x=-2$, entonces $f(-2)=\sqrt{3(-2)+12}=\sqrt{-6+12}=\sqrt{6}$ EXISTE

2) La función va a ser continua en este intervalo.

3) Puntos de corte con los ejes:

   Con OY: si $x=0$ entonces $y=\sqrt{3\cdot 0+12}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. El punto de corte es $\left(0,2\sqrt{3}\right)$

   Con OX: si $y=0$ entonces $0=\sqrt{3x+12}\Rightarrow 3x+12=0\Rightarrow 3x=-12\Rightarrow x=-4$. El punto de corte es $(-4,0)$

4) No hay asíntotas verticales.

5) No hay asíntota horizontal, pues para valores grandes de *x*:

x	10	50	100	5000
y	$\sqrt{42}=6'48$	$\sqrt{162}=12'72$	$\sqrt{342}=18'49$	$\sqrt{15012}=122'52$

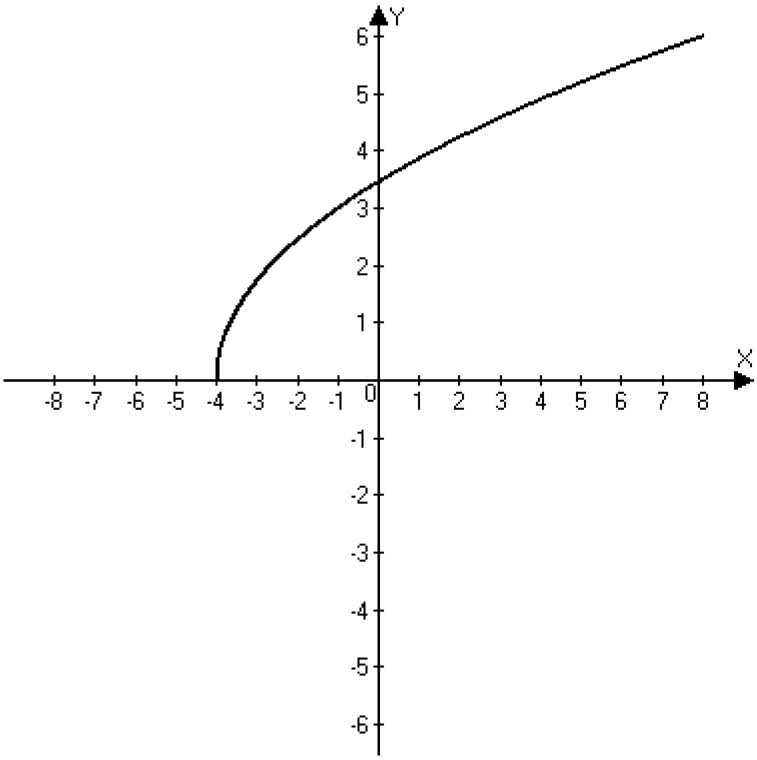
Luego cuando *x* se acerca a $+\infty$, las imágenes también tienden a $+\infty$. No existe asíntota horizontal.

¿Por qué no tiene sentido plantearse la tendencia en $-\infty$?

6) Signo de la función:

La función es positiva en todo el dominio $\left[-4,+\infty\right)$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la gráfica de la función es:



10. INTERPOLACIÓN.

10.1. INTRODUCCIÓN.

En determinadas ocasiones, cuando conocemos unos datos referidos a un fenómeno, podemos utilizar las denominadas reglas de tres: “Si una camisa cuesta

30 € y me han rebajado un 15%, ¿cuánto cuesta finalmente?" Esta pregunta la respondíamos realizando la siguiente regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 30 \text{ ——————— } 100\% \\ x \text{ ——————— } 15\% \end{array}\right\} \text{ de donde } x = \frac{30 \cdot 15}{100} = \frac{450}{100} = 4'5 \text{ €}$$

Así, deducíamos que el precio final era de $30 - 4'5 = 25'5$ €

Pues bien, este tipo de deducciones puede utilizarse también cuando conocemos más de un dato de un fenómeno y queremos "predecir" otros a partir de ellos.

Ejemplo:

El censo de la población de las ciudades se realiza cada diez años. Así, con respecto a la Comunidad de Murcia, observamos los siguientes resultados:

Año	1970	1981	1991
Población (miles)	832	958	1.060

La interpolación consiste en deducir, a partir de los datos anteriores, qué población había en un año intermedio. Por ejemplo: ¿Qué población había en 1987?

Si conociésemos una función, esto es, una expresión algebraica que determinase unívocamente la población en función del tiempo, no tendríamos más que sustituir el tiempo por el año y calcular su imagen.

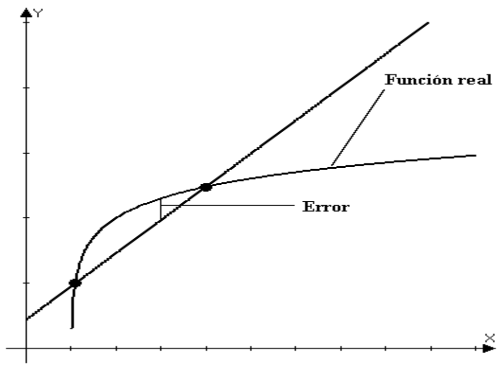
Como no conocemos tal función, lo que vamos a hacer es construir nosotros una función y a partir de ella predecir el resultado.

Según el tipo de función que elijamos, tendremos un tipo distinto de interpolación.

10.2. INTERPOLACIÓN LINEAL.

Si la función que elegimos es una función lineal, estamos realizando una interpolación lineal, que consiste, por tanto, en aproximar valores de una función a partir de una recta.

Como estamos aproximando por una función que no es la real, aparece un error, llamado ERROR DE ESTIMACIÓN, que es la diferencia entre el valor real y el aproximado que hemos calculado, tal como se observa en la figura adjunta. Lo que



intentaremos es que dicho error sea lo más pequeño posible.

Vamos a usar la interpolación lineal para predecir la población en la región de Murcia en 1987:

Año	1970	1981	1991
Población (miles)	832	958	1.060

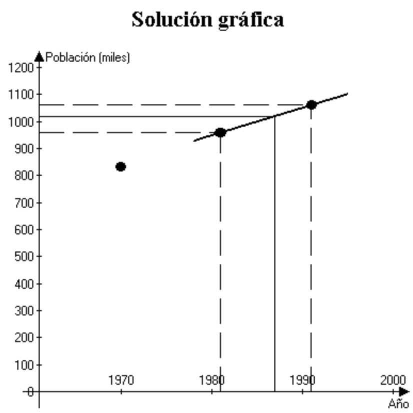
Lo primero es fijarnos en que el valor de *x*, 1987, se encuentra entre $x = 1981$ y $x = 1991$. Eso quiere decir que vamos a interpolar a partir de estos dos puntos utilizando la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos.

Como sabemos que la ecuación punto pendiente de una recta es $y - y_0 = m(x - x_0)$, donde $m =$ pendiente de la recta se puede calcular:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

En nuestro caso los puntos son $(1981, 958)$ y $(1991, 1060)$, de donde

$m = \frac{1060 - 958}{1991 - 1981} = \frac{102}{10} = 10'2$ y, sustituyendo:



$$y - 958 = 10'2(x - 1981) \Rightarrow y = 10'2x - 20206'2 + 958 \Rightarrow y = 10'2x - 19248'2$$

Luego la recta interpoladora es $y = 10'2x - 19248'2$

Con lo cual, para predecir la población en 1987, sustituimos *x* por este valor, de donde:

$y = 10'2 \cdot 1987 - 19248'2 = 20267'4 - 19248'2 = 1019'2$ miles de habitantes

Por tanto, la predicción es que en 1987 había una población de 1.019.200 habitantes.

Ejercicio:

¿Qué población había en 1976?

Cuando el dato que queremos calcular no está comprendido entre dos datos conocidos, el proceso se denomina EXTRAPOLACIÓN.

Ejemplo:

Extrapola la población que habrá en Murcia en 1999.

Tenemos que predecir un dato posterior al último año conocido. Utilizamos la recta interpoladora de los dos últimos años (1981 y 1991): $y = 10'2x - 19248'2$

$x = 1999 \quad y = 10'2 \cdot 1999 - 19248'2 = 20398'8 - 19248'2 = 1141'6$ miles de habitantes.

10.3. INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA.

Cuando conocemos tres valores de un fenómeno, la función interpoladora con la que aproximamos el resto de valores que vamos a predecir es más exacta si utilizamos la función cuadrática.

Ejemplo:

Un anuncio de Tele-Pizza dice que las pizzas individuales (23 cm. de diámetro) cuestan 6'95 €; las medianas (31 cm. de diámetro) 10'15 €, y las familiares (41 cm. de diámetro) 15'20 € ptas. ¿Podemos encontrar una función que nos permita hallar el precio de las pizzas cualquiera que sea el tamaño del radio?

La siguiente tabla muestra la relación entre el radio (*x*) y el coste (*y*):

radio (cm.)	x	11'5	15'5	20'5
coste (€)	y	6'95	10'15	15'20

Puesto que nos dan tres valores, es presumible que el coste venga dado por una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Hay tres parámetros o incógnitas. Como conocemos tres puntos de la función, podemos construir un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para calcularlos:

$$\begin{cases} 6'95 = (11'5)^2 a + 11'5b + c \\ 10'15 = (15'5)^2 a + 15'5b + c \\ 15'20 = (20'5)^2 a + 20'5b + c \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $a = \frac{7}{600}$, $b = \frac{17}{100}$ y $c = \frac{2291}{1200}$, de manera que el polinomio interpolador es:

$$y = \frac{7}{600}x^2 + \frac{17}{100}x + \frac{2291}{1200}$$

Así, si queremos predecir el precio de una pizza de 27 cm. de diámetro, la respuesta sería:

$$x = \frac{27}{2} \qquad y = \frac{7}{600} \cdot \left(\frac{27}{2}\right)^2 + \frac{17}{100} \cdot \frac{27}{2} + \frac{2291}{1200} = \frac{2537}{300} \approx 8'46\ €$$

OBSERVACIÓN:

La interpolación cuadrática es un ejemplo que muestra que no siempre es posible utilizar “reglas de tres” para calcular datos a partir de otros. Cuando utilizamos las reglas de tres estamos considerando funciones lineales, y por lo tanto el polinomio interpolador sería de 1º grado, no de 2º, con lo cual el resultado sería distinto y habría mayor error.

Ejercicio:

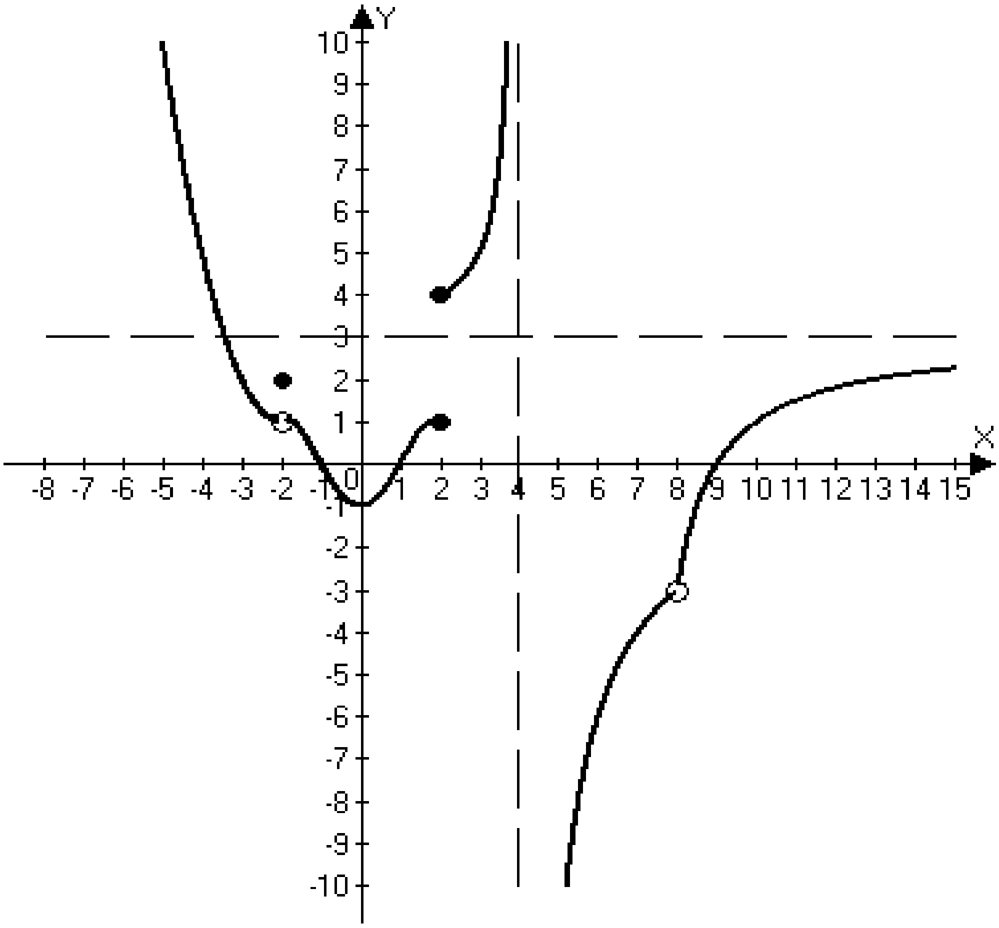
El número de habitantes de una determinada ciudad ha evolucionado de la siguiente manera:

año	1987	1988	1989	1990
población	53.000	71.000	91.000	

Utilizando una función cuadrática, extrapola la población en 1990.

EJERCICIOS DE LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1) Observa la gráfica siguiente:



a) Calcula el límite en los puntos que se indican: -2^+, -2^-, -1, 2^+, 2^-, 2, 4^-, 4^+, 4, 6, 8, $-\infty$, $+\infty$
b) ¿Existe alguna diferencia entre las características de la función en $x=-2$ y $x=8$?
c) ¿Y en $+\infty$ y $-\infty$?
d) En la anterior gráfica hay un error. Indica cuál es.

2) Indica en qué puntos la anterior función no es continua, explicando por qué y qué tipos de discontinuidades aparecen.

3) Calcula los siguientes límites explicando previamente por qué lo haces así:

a) $\lim_{x\to 2}\left(-x^2+6x-3\right)$

b) $\lim_{x\to -3}\left(-x^2-7x\right)$

c) $\lim_{x\to -1}\sqrt{x^2+3}$

d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+\pi}{x^2+1}$

e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{-x^3+3x}{x^2-3x+2}$

f) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x}{x^2-25}$

g) $\lim_{x\to 10} 2^x$

h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

i) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2+x-6}$

j) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}$

k) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2+x}$

l) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^3-6x^2+8}{x^3-5x^2+8x-4}$

m) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^3+2x^2}{2x^3-2x^2}$

n) $\lim_{x\to 2} f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & si \quad x\le 2 \\ x^2+1 & si \quad x>2 \end{cases}$$

o) $\lim_{x\to -1} g(x)$, donde

$$g(x)=\begin{cases} -x^2-x-1 & si \quad x<-1 \\ 2^x & si \quad x>-1 \end{cases}$$

p) $\lim_{x\to 0} h(x)$, donde

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & si \quad x<0 \\ 2x+1 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

4) Estudia si son continuas en $\mathbb{R}$ las funciones de los apartados j, m, n, y o del ejercicio anterior.

5) Encuentra de manera razonada y explicando el procedimiento empleado, el valor de "*a*" para que la función $f(x)$ sea continua en $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x\le 1 \\ x^2+ax-1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

6) Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-\pi x+4$

b) $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+x+1}$

c) $f(x)=2^x$

d) $f(x)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$

e) $f(x)=\log x$

f) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$

g) $f(x)=\dfrac{2x^2+7x-1}{x^2-3x+2}$

h) $f(x)=\dfrac{x^3+\pi^2}{x^2-4}$

i) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x}{x^2-5}$

7) Representa gráficamente lo más aproximado que puedas:

a) $f(x)=x^3-x$
b) $f(x)=2x^3-4x^2-10x+12$
c) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-9}$
d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+5}$
e) $f(x)=\dfrac{5}{x+6}$
f) $f(x)=\sqrt{x}$
g) $f(x)=x^4-13x^2+36$
h) $f(x)=\sqrt{2x+6}$
i) $f(x)=3\cdot 2^{5x}$
j) $f(x)=5\log 2x$
k) $f(x)=\sqrt{x-8}$

8) La función del apartado "e" del ejercicio anterior es de proporcionalidad inversa. Indica sus características. Encuentra una relación entre dos variables que sea de este tipo.

9) ¿Qué diferencias encuentras entre la función "i" del ejercicio 7 y una exponencial simple? Indica a qué son debidas.

10) Una expedición de montañeros dispone de 200 raciones de comida para realizar una escalada. Quieren calcular el número máximo de personas que pueden realizarla dependiendo del número de días que dure. Razona el procedimiento a seguir para construir una tabla que relacione las variables número de personas y número de días, explica dicho procedimiento, construye la tabla, encuentra la expresión analítica de la función que relaciona las variables y represéntala gráficamente.

11) Halla la expresión analítica de la función de proporcionalidad inversa que pasa por el punto (1,5).

12) En la realización de un experimento, se han observado los siguientes valores para las dos variables que intervienen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	28	14	9'3	7	5'6	4'6	4	3'5

a) Construye una gráfica que se adapte a los valores obtenidos.
b) ¿Se trata de una función de proporcionalidad inversa? Explica por qué.
c) En caso afirmativo, encuentra su expresión analítica.

13) En una fábrica de montajes se ha estimado que el número de montajes realizados por un aprendiz dependen de los días de prácticas según la función $f(x)=\dfrac{60x}{x+6}$, donde x es el tiempo en días.

a) ¿Cuántos montajes realizará el primer día? ¿Y el vigésimo cuarto?
b) ¿Cuántos días tiene que practicar para superar los 60 montajes al día?
c) Dibuja la gráfica de esta función.

14) Se ha realizado una investigación con ranas que consistía en colocarles unos pequeños pesos y hacerles saltar a continuación. La velocidad de contracción muscular de sus patas disminuía con los pesos que se colocaban. Se estimó la velocidad de contracción en función del peso, quedando determinada por la función $V(p)=\dfrac{15+0'007p}{p}$, donde *p* representa los pesos en gramos mayores o iguales a uno. La velocidad viene expresada en cm/s.

a) ¿Qué velocidad de contracción tiene una rana que lleva un peso de 15 g? ¿Y con un peso de 60 g?
b) Dibuja la gráfica de la función.
c) Cuando la carga que lleva la rana aumenta, ¿hacia dónde tiende la velocidad?
d) Deduce todas las consecuencias que puedas a partir de la gráfica para el fenómeno estudiado.

15) Representa gráficamente los siguientes pares de funciones, compara las gráficas obtenidas y comenta las similitudes y diferencias tratando de explicar a qué son debidas:

a) $f(x)=\sqrt{x-2}$ y $g(x)=-\sqrt{x-2}$
b) $f(x)=\sqrt{-2x+8}$ y $g(x)=-\sqrt{-2x+8}$
c) $f(x)=2^x$, $f(x)=3\cdot 2^x$, $f(x)=2^{2x}$ y $f(x)=3\cdot 2^{2x}$ (estudia las cuatro de forma simultánea)

16) Un automóvil parte de Asunción a las 10:00 horas para hacer un viaje de 350 km. Sabemos que a las 12:00 horas había recorrido 120 km. y que llegó a su destino a las 14:30 horas.

a) ¿Cuántos kilómetros había recorrido a las 11:00 horas ?
b) ¿A qué hora pasó por el kilómetro 300 de su recorrido?
c) Haz las consultas necesarias para saber cuál es destino.

17) El número de alumnos aprobados en 1º de bachillerato de un instituto fue en 1994, 70; en 1995, 60; en 1997, 80.

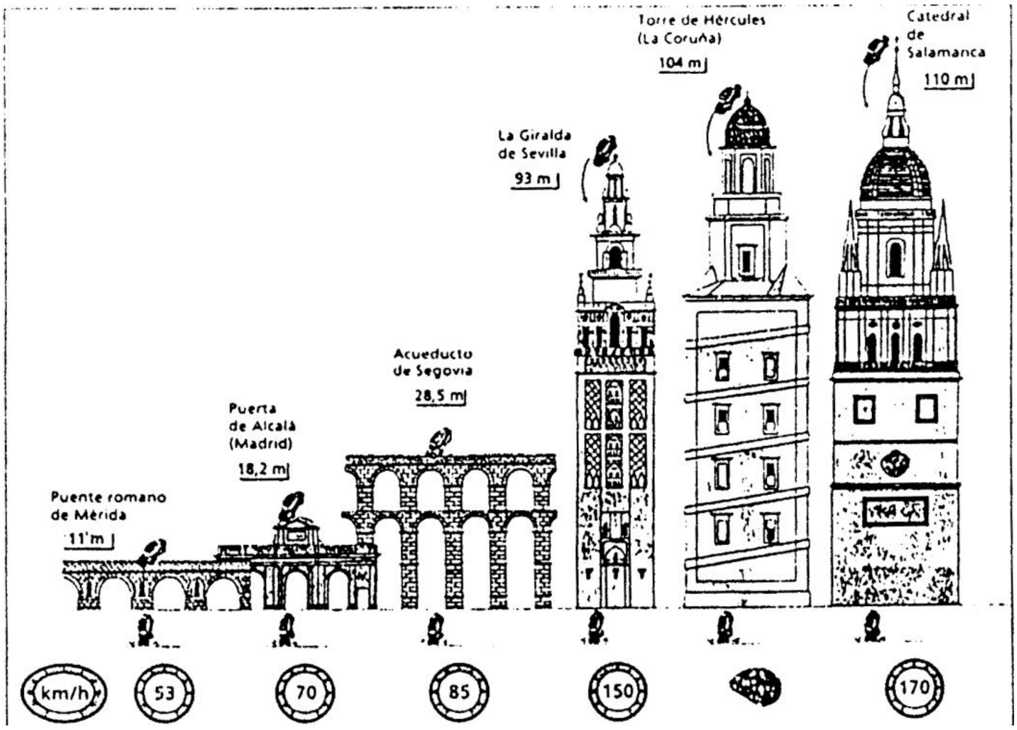
a) Interpola lineal y cuadráticamente el número de alumnos aprobados en 1996. ¿Cuál es más fiable?
b) Extrapola el número de aprobados que habrá en 1998.

18) La relación que hay entre el tiempo (en días) y el peso (en gramos) de los embriones de cierta especie viene dada por:

t	3	5	8
p	8	22	73

a) Halla el polinomio interpolador.
b) Calcula el peso de un embrión de 6’5 días.

19) La siguiente figura muestra la relación entre la altura de una serie de monumentos españoles y la velocidad a que llegaría al suelo un automóvil si se lanzara desde su extremo superior.



a) Calcula el polinomio interpolador.
b) ¿Con qué velocidad se estrellaría un móvil lanzado desde la Torre de Hércules ?
c) ¿Sabrías encontrar la relación funcional entre la velocidad y la altura ?
d) Comprueba que no hubiese sido posible aplicar una regla de tres para resolver el ejercicio.

EJERCICIOS RESUELTOS DE LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1) Una función *f(x)* presenta la gráfica de la figura. A partir de ella indica en qué puntos existe alguna discontinuidad e indica de qué tipo es.

Observando la gráfica podemos deducir que hay discontinuidad en los siguientes puntos:

b) En $x=-2$, una discontinuidad inevitable de salto infinito, ya que los límites laterales son $-\infty$ y $+\infty$
c) En $x=1$, una discontinuidad evitable, ya que existe el límite y vale 2. Como $f(1)=3$, bastaría cambiar esta imagen por 2 para que la función fuese continua en este punto.
d) En $x=2$, una discontinuidad inevitable de salto finito, ya que el límite por la izquierda es 3 y por la derecha 4, por lo que el salto es de 1.

2) Indica donde son discontinuas las siguientes funciones y cómo evitar la discontinuidad cuando sea posible:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ b) $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-1}$ c) $h(x)=\begin{cases}3x-1 & si \quad x\le 2\\ 4x-5 & si \quad x>2\end{cases}$

a) Como la función es racional, no habrá imagen en el punto en el que el denominador sea 0, y por tanto la función no será continua en dicho punto.

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad f(2)=\dfrac{2^2-3\cdot 2+2}{2-2}=\dfrac{4-6+2}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ NO EXISTE

Falla la primera condición, $x=2$ no tiene imagen, luego la función no es continua en $x=2$.

No sabemos de qué tipo es la discontinuidad. Para saberlo, tenemos que comprobar si existe o no el límite cuando *x* tiende a 2.

Al sustituir en la función nos ha dado $\dfrac{0}{0}$, luego tenemos una INDETERMINACIÓN. Hemos de factorizar el numerador:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2\\ 2 & & 2 & -2\\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0}\end{array}$$

, luego $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

Con lo que $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=2-1=1$

Como $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$, entonces la discontinuidad es evitable:

Dando a $x = 2$ la imagen $f(2) = 1$, la función es continua en este punto, pues:

a) Existe la imagen de 2 y vale 1
b) Existe el límite cuando *x* tiende a 2 y vale 1
c) La imagen de 2 y el límite en 2 coinciden.

Por tanto, la función $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-2} & si \quad x \neq 2 \\ 1 & si \quad x = 2 \end{cases}$ evita la discontinuidad en x=2.

b) La función también es racional, el razonamiento es el mismo que en el apartado anterior:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad g(1) = \dfrac{3 \cdot 1 - 1}{1 - 1} = \dfrac{2}{0}$ NO EXISTE

g(x) no es continua en $x = 1$. Además, al darnos $\dfrac{2}{0}$ al intentar calcular la imagen, esto nos está indicando que el límite cuando *x* tiende a 1 va a ser ∞.
Para saber con qué signo, tomamos un valor próximo a 1 a su izquierda y otro a su derecha y calculamos su imagen:

x	*y*
1’1	$\dfrac{3 \cdot 1'1 - 1}{1'1 - 1} = \dfrac{2'3}{0'1} = 23$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x - 1}{x - 1} = +\infty$

x	*y*
0’9	$\dfrac{3 \cdot 0'9 - 1}{0'9 - 1} = \dfrac{1'7}{-0'1} = -17$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x - 1}{x - 1} = -\infty$

Por tanto, en x=1 existe una discontinuidad inevitable de salto infinito.

c) Al ser h(x) una función definida a trozos en la que cada una de las ramas es una función polinómica, el único punto donde no sabemos de antemano si es continua o no es en el punto frontera entre las dos ramas, en este caso en $x = 2$. Estudiamos la continuidad en $x = 2$:

1. $h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$. Se cumple la primera condición, $x = 2$ tiene imagen.
2. $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$
   Como $x = 2$ es un punto frontera de dos ramas de una función, tendremos que ver si existen los límites laterales y coinciden.

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-1) = 3\cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$$
$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+}(4x-5) = 4\cdot 2 - 5 = 8 - 5 = 3$$

Los límites laterales existen pero son distintos; en consecuencia, la función es discontinua en $x=2$, pues no existe el límite en este punto. Además presenta una discontinuidad de salto finito. El salto es en este caso $5-3=2$.

3) Calcula los siguientes límites explicando el proceso seguido:

a) $\lim_{x\to -\infty}\left(3x^2-7x-29\right)$ b) $\lim_{x\to 1} 5\cdot 2^{3x}$ c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$

d) $\lim_{x\to \infty}\frac{6x^2-7x}{2x^2+1}$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-5x^2+8x-4}$

a) Como la función es polinómica el límite en el ∞ va a ser ∞. Queda saber con qué signo. Para ello, hemos de fijarnos en el término de mayor grado y comprobar qué signo tiene cuando x tiende a $-\infty$: para valores muy pequeños de x, $3x^2$ es positivo, pues la potencia es par. También podemos tener en cuenta que la función es cuadrática, y como *a* es positivo, la gráfica “va hacia arriba”, es decir, tiende a $+\infty$.

Por tanto, $\lim_{x\to -\infty}\left(3x^2-7x-29\right) = +\infty$

b) Como la función es exponencial, es continua, con lo que el límite cuando x tiende a 1 coincidirá con la imagen de 1.
Luego $\lim_{x\to 1} 5\cdot 2^{3x} = 5\cdot 2^{3\cdot 1} = 5\cdot 2^3 = 5\cdot 8 = 40$

c) La función es racional; comenzamos calculando la imagen en $x=1$:

$\frac{1^2+2\cdot 1-3}{1^2-3\cdot 1+2} = \frac{0}{0}$ No existe la imagen de $x=1$. Tenemos una INDETERMINACION.

Para resolverla tenemos que descomponer los polinomios; además sabemos que las divisiones las tenemos que hacer entre $x-1$, pues la raíz es $x=1$.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & \lfloor 0 \end{array}$$
luego $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array}$$
luego $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

Sustituyendo: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)}{(x-2)}=\frac{1+3}{1-2}=\frac{4}{-1}=-4$

d) Para calcular el límite en el infinito de una función racional tenemos que fijarnos en el grado del numerador y del denominador. Como ambos son del mismo grado, el límite va a ser el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado. Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-7x}{2x^2+1}=\frac{6}{2}=3$$

Además, como consecuencia, podemos decir que la recta $y=2$ es una ASÍNTOTA HORIZONTAL DE ESTA FUNCION.

e) Para calcular el límite en $x=2$ de una función racional empezamos sustituyendo para hallar la posible imagen:

$$\frac{2^3-4\cdot 2^2+4\cdot 2}{2^3-5\cdot 2^2+8\cdot 2-4}=\frac{8-16+8}{8-20+16-4}=\frac{0}{0}$$ INDETERMINACIÓN

Descomponemos los polinomios dividiendo entre $x-2$, ya que $x=2$ es raíz de los mismos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & & 2 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \lfloor 0 \end{array}$$

luego $x^3-4x^2+4x=(x-2)(x^2-2x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 2 & & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \lfloor 0 \end{array}$$

luego $x^3-5x^2+8x-4=(x-2)(x^2-3x+2)$

Descomponiendo los polinomios, queda:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-2x)}{(x-2)(x^2-3x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-2x)}{(x^2-3x+2)}=$$

$$=\frac{2^2-2\cdot 2}{2^2-3\cdot 2+2}=\frac{0}{0}$$ INDETERMINACIÓN

Obtenemos nuevamente una indeterminación. Eso significa que el numerador y denominador se pueden seguir factorizando y simplificando: $x=2$ vuelve a ser raíz, y, por tanto, $x-2$ factor:

Para descomponer x^2-2x, observamos que es un polinomio sin término independiente: para factorizarlo, tenemos que sacar factor común *x*:

$$x^2-2x=x\left(x-2\right)$$

Descomponemos x^2-3x+2 usando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \text{luego } x^2-3x+2=\left(x-2\right)\left(x-1\right)$$

Y sustituyendo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-2x\right)}{\left(x^2-3x+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(x-2\right)}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{\left(x-1\right)}=\frac{2}{2-1}=\frac{2}{1}=2$$

4) Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $y=2^x$ b) $y=\ln 3x$ c) $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(-2x\right)$ d) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

e) $y=\log\left(x^2-4\right)$ f) $y=\sqrt{3x-2}$ g) $y=\operatorname{sen} x$

a)Comenzamos con las asíntotas verticales: En este caso no existen, puesto que esta función exponencial tiene por dominio a todos los números reales y, por tanto, siendo continua, en ningún punto el límite va a ser infinito.

En cuanto a la asíntota horizontal, sabemos que las funciones exponenciales tienden a acercarse al eje de abscisas. En este caso, como la base es mayor que 1, cuanto menor es la variable *x* más próxima a cero estará su imagen, por lo que tenemos:

$\lim_{x\to-\infty} 2^x=0$ La recta $y=0$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

b)El dominio de esta función es $\left(0,+\infty\right)$. Además, como la base es $e=2'718281\cdots$, mayor que 1, sabemos que la función es creciente, con lo que $\lim_{x\to 0^+}\ln\left(3x\right)=-\infty$, y $x=0$ es una asíntota vertical por la derecha.

La función logarítmica no tiene asíntota horizontal, puesto que el límite en $+\infty$ va a ser $+\infty$.

c)El dominio de esta función es $(-\infty, 0)$ (pues $-2x$ es positivo cuando x es un número negativo). Por consiguiente, esta función va a tener una asíntota vertical por la izquierda en $x=0$, ya que el límite en 0 va a ser $+\infty$.

En cuanto a la asíntota horizontal, no existe por la misma razón que en el ejercicio anterior.

d)Habrá una asíntota vertical en el punto en el que el límite sea ∞. Al ser una función racional, esto ocurrirá cuando al sustituir en algún punto obtengamos $\frac{a}{0}$.

En nuestro caso: $x-1=0 \Rightarrow x=1$.

Calculando su imagen, daría $\frac{2\cdot 1-1}{1-1}=\frac{1}{0}$, luego el límite es infinito. $x=1$ es una asíntota vertical.

En cuanto a la asíntota horizontal, al ser la función racional y tener el numerador y el denominador el mismo grado, el valor del límite en el infinito es el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado, con lo que este límite es 2 y en consecuencia la asíntota horizontal es la recta $y=2$.

e)Primeramente calculamos el dominio de esta función. Como es una función logarítmica habrá de cumplirse que $x^2-4>0$.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Tenemos que estudiar el signo de en $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ y $(2,+\infty)$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
x	-3	1	4
x^2-4	$(-3)^2-4=9-4=5$	$1^2-4=1-4=-3$	$4^2-4=16-4=12$
$\log\left(x^2-4\right)$	$\log 5$	$\log(-3)$	$\log 12$
	EXISTE	NO EXISTE	EXISTE

Por tanto, el dominio lo forman los intervalos ($(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

Nótese que al sustituir x por -2 o 2 queda $\log 0$, que no existe. Por tanto, en $x=-2$ puede haber una asíntota vertical por la izquierda y en $x=2$ una asíntota vertical por la derecha.

Para comprobarlo, damos valores próximos a estos números y calculamos su imagen para saber si se acercan a $+\infty$ o a $-\infty$.

$$x=-2'0005 \Rightarrow y=\log\left((-2'0005)^2-4\right)=\log(4'00200025-4)=$$
$$=\log(0'00200025)=-2'69$$

Luego cuanto más se acerque *x* a -2 por su izquierda, más cerca estará su imagen de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to -2} \log\left(x^2-4\right) = -\infty \Rightarrow x=-2$ es una asíntota vertical por la izquierda.

$$x = 2'0005 \Rightarrow y = \log\left(\left(2'0005\right)^2 - 4\right) = \log\left(4'00200025 - 4\right) =$$
$$= \log\left(0'00200025\right) = -2'69$$

Luego cuanto más se acerque *x* a 2 por su derecha, más cerca estará su imagen de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 2} \log\left(x^2-4\right) = -\infty \Rightarrow x=2$ es una asíntota vertical por la derecha.

Como la función es logarítmica, no tiene asíntotas horizontales.

f) Como la función es radical, no tiene ningún tipo de asíntotas, ya que su dominio es cerrado y el límite en el infinito es infinito.

g) La función seno no presenta ningún tipo de asíntotas, puesto que su dominio son todos los números reales y las imágenes van oscilando indefinidamente entre -1 y 1 por ser la función periódica.

5) Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{5}{x}$ e indica todas sus características.

Como vemos se trata de una función de proporcionalidad inversa. Vamos a dibujarla siguiendo los pasos estudiados para cualquier función y después indicaremos lo que la caracteriza.

a) Dominio:

El único punto que no tiene imagen es el que hace que el denominador sea 0, en este caso, $x = 0$.

Por tanto, $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Puntos de corte con los ejes:

$x = 0$ no tiene imagen por no pertenecer al dominio.

$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{x} \Rightarrow 0 \cdot x = 5 \Rightarrow 0 = 5$ IMPOSIBLE

Tampoco hay punto de corte con el eje horizontal.

Recordemos que las funciones de proporcionalidad inversa no cortan a los ejes coordenados.

c) Asíntotas verticales:

Puesto que en $x=0$ al sustituir obtenemos $\frac{5}{0}$, esto indica que $\lim_{x\to 0}\frac{5}{x}=\infty$, de donde $x=0$ es una asíntota vertical.

d) Asíntota horizontal:

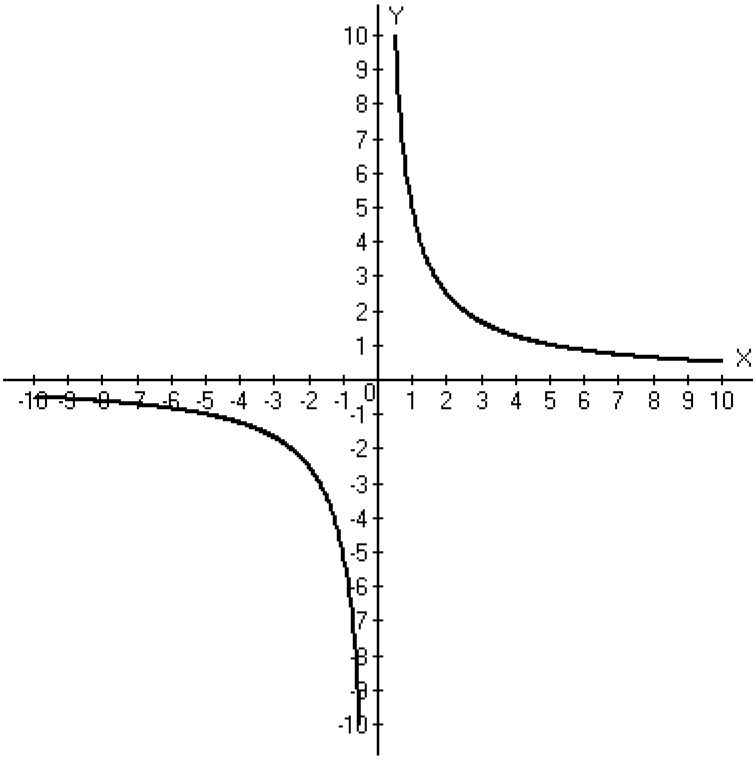
Al tratarse de una función racional en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, la asíntota horizontal es $y=0$, ya que en este caso $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$

e) Signo de la función:

Existen dos regiones delimitadas por la asíntota vertical: (-,0) y (0,-). Estudiando el signo de la función en cada una de ellas:

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
x	-1	2
$y=\frac{5}{x}$	$\frac{5}{-1}=-5$	$\frac{5}{2}=2'5$
	FUNCIÓN NEGATIVA	FUNCIÓN POSITIVA

Con estos datos, la gráfica de la función es:



Y podemos deducir sus características de función de proporcionalidad inversa:

- El único punto que no pertenece al dominio es 0.
- Es siempre decreciente.
- Se sitúa en el 1º y 3º cuadrantes.
- Las variables son inversamente proporcionales: cuanto más próxima está *x* de 0, mayor será *y*; cuanto mayor sea *x*, más próxima a 0 estará *y*.
- La relación entre las variables es que su producto es 5: $x \cdot y = 5$.

6) Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & si \quad x \leq -1 \\ x^2 - 6 & si \quad x > -1 \end{cases}$

Las dos ramas de la función son funciones polinómicas, que son continuas, luego el único punto donde no sabemos lo que ocurre es en la frontera entre las dos ramas, ya que no sabemos si éstas se unirán o se producirá un salto en la gráfica.

Para comprobarlo tenemos que verificar las tres condiciones que deben cumplirse para que una función sea continua en un punto:

¿Es continua $f(x)$ en $x = -1$?

a. $\exists\, f(-1)$:

$f(-1) = 3 \cdot (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$

b. $\exists \lim_{x \to -1} f(x)$:

Habrá que ver si existen los límites laterales y coinciden:

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (3x - 2) = 3 \cdot (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^2 - 6) = (-1)^2 - 6 = 1 - 6 = -5$

Por tanto el límite de la función en -1 existe y vale -5.

$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$

c. $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x)$

La imagen de -1 coincide con el límite en -1 . Por tanto, la función es continua en $x = 1$. En consecuencia, la función $f(x)$ es continua en -1.

7) De una función lineal se conocen los puntos $A(1'2, 5'72)$ y $B(4, 11'6)$.

a) ¿Cuál es la recta interpoladora?
b) ¿Qué valor toma dicha recta en $x = 2'1$?

a. Tenemos que calcular el polinomio interpolador de 1er grado, es decir, la función lineal que pasa por dos puntos.
Calcularemos su ecuación punto-pendiente.

La pendiente viene dada por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, o sea, $m = \dfrac{11'6 - 5'72}{4 - 1'2} = \dfrac{5'88}{2'8} = 2'1$

Utilizando la ecuación punto pendiente y sabiendo que $m = 2'1$ y que $A(1'2, 5'72)$:

$y - 5'72 = 2'1(x - 1'2) \Rightarrow y - 5'72 = 2'1x - 2'52 \Rightarrow y = 2'1x + 3'2$

b. Sustituyendo $x = 2'1$: $y = 2'1 \cdot 2'1 + 3'2 = 4'41 + 3'2 = 7'61$

8) El gasto en fotocopias durante los tres primeros meses de un año ha sido:

ENERO	FEBRERO	MARZO
1100	1500	1550

Extrapola el gasto que se prevé para abril, utilizando los dos métodos de extrapolación conocidos, compara los dos resultados, tanto gráfica como numéricamente e indica su validez.

En primer lugar hemos de observar que la variable independiente es el mes del año, y la dependiente el número de fotocopias en ese mes. Esto significa que la variable *x* **NO ES NUMERICA**, ya que su valores son meses. Por tanto, para poder construir una función, hemos de asignar a cada valor del mes un número. Lo más sencillo es considerar el ordinal de cada mes: enero el 1, febrero el 2, marzo el 3,...

Así, podemos decir que los datos que tenemos son:

x = Mes	1	2	3
y = Nº fotocopias	1100	1500	1550

Los dos modos de extrapolar son lineal y cuadráticamente.

a. Extrapolación lineal:

Tenemos que utilizar los datos de dos meses. Como queremos extrapolar el mes de abril $(x=4)$ lo más lógico es elegir los datos de febrero y marzo $(x=2 \text{ y } x=3)$.

La pendiente de la recta es $m=\frac{1550-1500}{3-2}=\frac{50}{1}=50$

La ecuación punto-pendiente:

$y-1500=50(x-2)\Rightarrow y-1500=50x-100\Rightarrow y=50x+1400$ es la recta extrapoladora.

Con lo que podemos extrapolar para el mes de abril un número de fotocopias de:

$x=4 \quad y=50\cdot 4+1400=200+1400=1600$

Se prevé que se realicen 1600 fotocopias.

b. Extrapolación cuadrática:

Como conocemos tres puntos de la curva, podemos calculara la función cuadrática que pasa por ellos:

$y=ax^2+bx+c$

Los puntos son $(1,1100)$, $(2,1500)$ y $(3,1550)$.

Todos han de verificar la ecuación, con lo que:

$$\begin{aligned}1100&=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c\\1500&=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c\\1550&=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c\end{aligned}$$

Operando nos queda el sistema $\begin{cases} a+b+c &= 1100\\ 4a+2b+c &= 1500\\ 9a+3b+c &= 1550\end{cases}$

Resolviendo obtenemos las soluciones $a=-175$, $b=925$ y $c=350$, con lo que la función cuadrática es $y=-175x^2+925x+350$.

Extrapolando el número de fotocopias a partir de esta función, resulta:

$x = 4 \quad y = -175 \cdot 4^2 + 925 \cdot 4 + 350 = -2800 + 3700 + 350 = 1250$

Por tanto, extrapolando cuadráticamente, para el mes de abril se prevé que se lleven a cabo 1250 fotocopias. Comparemos los resultados: ¿cuál de ellos es más fiable? Representamos gráficamente las dos funciones:

Vértice: $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-925}{-350} = 2'64 \qquad y = 1572'32$

Podemos observar que la recta se aleja bastante del 1º punto, es decir, da una predicción que no tiene en cuenta el resultado del mes de enero. En cambio, la predicción cuadrática tiene en cuenta los tres datos conocidos; como la parábola está invertida, en abril resulta un número de fotocopias menor que en los meses precedentes.