DERIVADAS

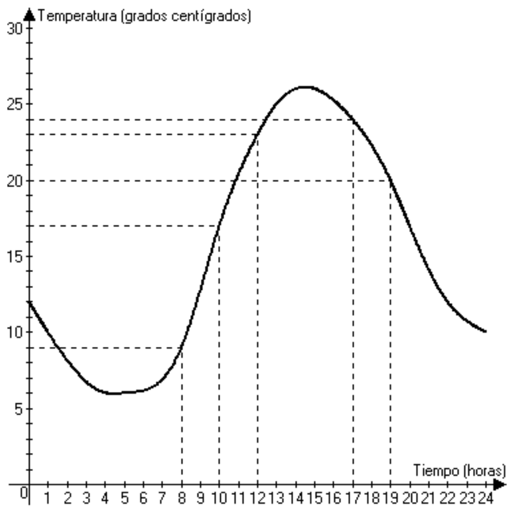
INDICE: **Pág.**

DERIVADAS

1. TASA DE VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO.

1.1. INTRODUCCIÓN.

Vamos a fijarnos en la siguiente gráfica, que representa la evolución de las temperaturas durante un día completo medidas en una estación meteorológica:



A partir de esta gráfica ya sabemos deducir una serie de características para el fenómeno estudiado. También podemos investigar cómo ha variado la temperatura entre dos momentos determinados:

Por ejemplo, a las 8 de la mañana la temperatura era de 9º C, $t(8)=9$, y a las 12 horas era de 23º C, $t(12)=23$; podemos entonces afirmar que la temperatura ha variado desde las 8 horas hasta las 12 horas:

$$t(12)-t(8)=23-9=14$$

Que esta variación sea positiva significa que la función es creciente en este intervalo: desde las 8 hasta las 12 la temperatura ha aumentado 14º C. La variación de la función en este intervalo es positiva.

En cambio, si nos fijamos en la gráfica observamos que la función es decreciente entre las 17 y las 19 horas. Si calculamos cuanto ha variado:

$t(17)=24^{o}\,\mathrm{C}$ $\qquad$ $t(19)=20^{o}\,\mathrm{C}$

$$t(19)-t(17)=20-24=-4$$

Luego la variación de la temperatura entre las 17 y las 19 horas ha sido de -4º C. El hecho de que esta variación sea negativa significa que la función ha decrecido.

1.2. DEFINICIÓN.

Dada una función $f(x)$ y dados dos valores de su dominio, $x_1 < x_2$, llamamos **TASA DE VARIACION DE** $f(x)$ **EN EL INTERVALO** $[x_1, x_2]$ al valor de $f(x_2) - f(x_1)$

__Ejercicio:__

A partir de la gráfica anterior, calcula:

a. La variación de temperatura entre las 10 y las 13 horas y entre las 15 y las 17 horas.
b. Una hora tal que la variación de temperatura entre las 8 y dicha hora sea 8º C; lo mismo para que sea 4º C.

La tasa de variación también podemos calcularla cuando conocemos la expresión analítica de la función:

Dada $f(x) = 3x^2 - 5x$, la tasa de variación entre $x = 5$ y $x = 8$ es:

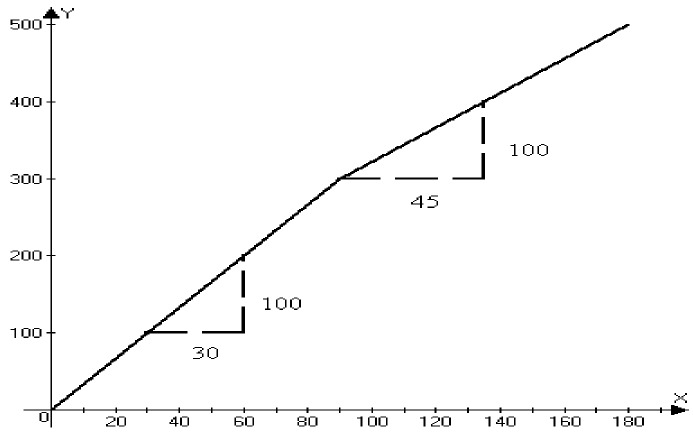
$$\begin{matrix} f(5) = 3\cdot 5^2 - 5\cdot 5 = 75 - 25 = 50 \\ f(8) = 3\cdot 8^2 - 5\cdot 8 = 192 - 40 = 152 \end{matrix} \Rightarrow f(8) - f(5) = 152 - 50 = 102$$

La tasa de variación es positiva. La función ha crecido de $x = 5$ a $x = 8$.

2. TASA DE VARIACIÓN MEDIA.

En el ejemplo con que el abríamos la pregunta anterior hemos calculado la tasa de variación entre dos valores de tiempo. Así, hemos visto que entre las 8 y las 12 la temperatura aumento 14º C, entre la 17 y las 19 horas disminuyó 4º C, etc. Para saber cuando se ha producido un aumento más rápido de temperatura, no nos basta con el valor de la tasa de variación (14º C, -4º C) sino que necesitamos también conocer en cuanto tiempo se ha producido, esto es, la variación de tiempo. Lo vemos en el siguiente ejemplo:

Un tren de alta velocidad realiza el recorrido entre dos ciudades distantes 500 Km. A 300 Km. del punto de partida, el tren modifica su velocidad. En la gráfica siguiente se representa la evolución de la distancia desde el punto de partida en función del tiempo:



La variación de la función entre el minuto 30 y el 60 ha sido:

$d(60)-d(30)=200-100=100$ Km.

Entre los minutos 90 y 135 la variación fue:

$d(135)-d(90)=400-300=100$ Km.

Por tanto, en ambos intervalos la variación ha sido la misma, 100 km. Sin embargo, podemos preguntarnos: ¿ha variado la distancia con la misma rapidez en los dos casos?

Hemos de tener en cuenta que los primeros 100 km. se recorrieron entre el minuto 30 y el 60, es decir, se tardaron 30 minutos en recorrer $(60-30=30)$; en cambio, los segundos 100 km. se tardaron en recorrer 45 minutos $(135-90=45)$.

Luego podemos decir:

- En el primer tramo se recorrieron 100 km. en 30 minutos, por lo que la variación media fue de $\frac{100\text{ Km}}{30\text{ min.}}=3'33$ Km. por minuto
- En el segundo tramo se recorrieron 100 Km. en 45 minutos, por lo que la variación media fue de $\frac{100\text{ Km}}{45\text{ min.}}=2'2$ Km. por minuto

A este cociente es a lo que llamamos tasa de variación media**.** En el ejemplo que estamos estudiando podemos ver que la tasa de variación media es mayor desde el minuto 30 al 60 que desde el 90 al 135.

2.1. DEFINICIÓN.

Llamamos **TASA DE VARIACIÓN MEDIA** de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b] al cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Ejemplo:

Dada la función $f(x)=5x-4$, la tasa de variación media en los intervalos $[1,4]$ y $[5,7]$ es:

a) En $[1,4]$:

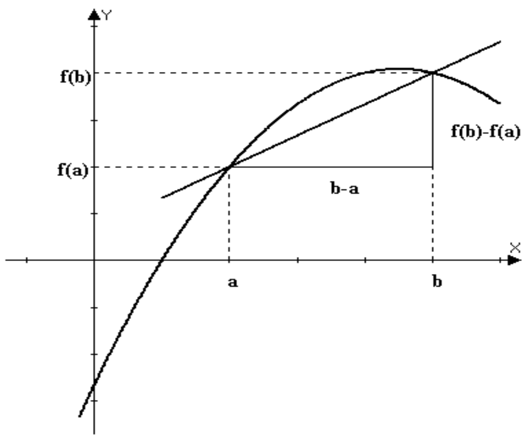
$$TVM_{[1,4]}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(5\cdot 4-4)-(5\cdot 1-4)}{4-1}=\frac{16-1}{3}=\frac{15}{3}=5$$

b) En $[5,7]$:

$$TVM_{[5,7]}=\frac{f(7)-f(5)}{7-5}=\frac{(5\cdot 7-4)-(5\cdot 5-4)}{7-5}=\frac{31-21}{32}=\frac{10}{2}=5$$

2.2. INTERPRETACION GEOMÉTRICA DE LA TASA DE VARIACION MEDIA.

Si nos fijamos en el gráfico de la derecha podemos observar que la tasa de variación media en un intervalo es el cociente entre los dos catetos del triángulo formado, es decir, es la tangente del ángulo que forma la recta que une los dos puntos y el eje X, es decir, la pendiente de la recta que une los dos puntos.

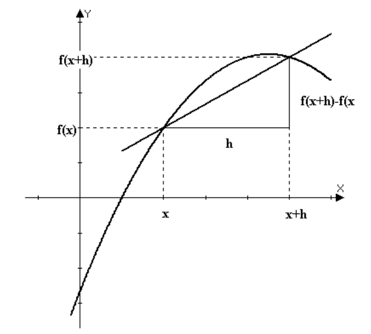
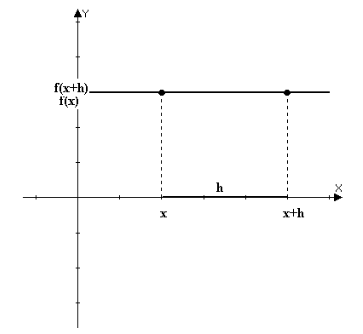
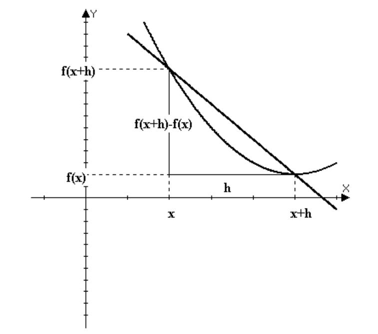


Por tanto, podemos decir que la tasa de variación media en el intervalo $[a,b]$ es la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Ejercicio:

¿Sabrías decir por qué hemos obtenido una TVM igual en los dos apartados del ejercicio anterior? ¿Cuál es la conclusión?

Cuando la función es creciente, la TVM es positiva; si la función decrece, la TVM es negativa; cuando la función es constante, la TVM es nula:

		
$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}>0$	$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=0$	$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}<0$
Tasa de variación media positiva	Tasa de variación media nula	Tasa de variación media negativa

Ejercicio:

Las medidas efectuadas en una fábrica de automóviles respecto al nivel de ruidos de uno de sus modelos han dado los siguientes resultados:

Velocidad (Km/h)	60	90	120	140
Decibelios (dB)	63’7	70’2	75’5	77’7

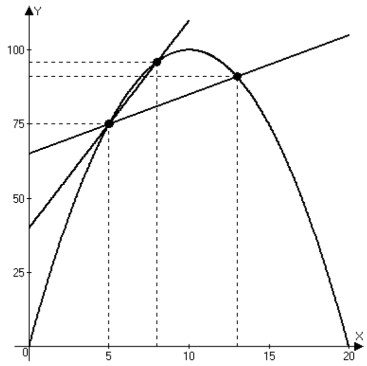
a. Calcula la tasa de variación, en decibelios, al pasar de una velocidad de 60 Km./h a otra de 90 Km./h.
b. Haz lo mismo al pasar de 90 Km./h a 120 Km./h.
c. ¿Es constante la tasa de variación media?

3. TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA DE UNA FUNCIÓN.

3.1. INTRODUCCIÓN.

Lanzamos un objeto al aire y medimos la distancia a la que se encuentra del suelo en función del tiempo. Dicha distancia viene expresada por la función $d\left(t\right)=20t-t^2$.

Su representación gráfica es la siguiente parábola:



En la gráfica podemos observar cual es la altura a la que se encuentra el objeto según va transcurriendo el tiempo (por ejemplo, alcanza la máxima altura a los 10 segundos, tarda 20 segundos en llegar al suelo, pero no tenemos información precisa de cómo está variando la altura en un instante determinado, por ejemplo para $t = 5$ segundos.

Para obtener esa información vamos a comprobar cómo varía la altura en intervalos que empiezan en $t = 5$ y tienen amplitudes cada vez menores:

Empezamos en el intervalo $[5,13]$. La tasa de variación media es:

$$TVM_{[5,13]} = \frac{d(13)-d(5)}{13-5} = \frac{91-75}{13-5} = \frac{16}{8} = 2$$

Luego en el intervalo $[5,13]$ la altura ha tenido una tasa de variación media de 2 metros por segundo.

Elegimos un intervalo más pequeño: $[5,8]$. La TVM es:

$$TVM_{[5,8]} = \frac{d(8)-d(5)}{8-5} = \frac{96-75}{8-5} = \frac{21}{3} = 7$$

Por tanto, en el intervalo $[5,8]$ la altura ha tenido una variación media de 7 metros cada segundo.

Consideramos ahora un intervalo de menor amplitud: $[5,6]$

$$TVM_{[5,6]} = \frac{d(6)-d(5)}{6-5} = \frac{84-75}{6-5} = \frac{9}{1} = 9$$

Luego, de los 5 a los 6 segundos la altura ha tenido una variación de 9 metros cada segundo.

Si tomamos ahora el intervalo $[5,5'5]$

$$TVM_{[5,5'5]} = \frac{d(5'5)-d(5)}{5'5-5} = \frac{79'75-75}{5'5-5} = \frac{4'75}{0'5} = 9'5$$

De los 5 a los 5’5 segundos la altura ha variado 9’5 metros cada segundo.

Seleccionamos ahora el intervalo $\left[5,5'1\right]$:

$$TVM_{[5,5'1]}=\frac{d\left(5'1\right)-d\left(5\right)}{5'1-5}=\frac{75'99-75}{5'1-5}=\frac{0'99}{0'1}=9'9$$

De los 5 a los 5’1 segundos la altura ha variado 9’9 metros cada segundo.

Elegimos el intervalo $\left[5,5'05\right]$:

$$TVM_{[5,5'05]}=\frac{d\left(5'05\right)-d\left(5\right)}{5'05-5}=\frac{75'4975-75}{5'05-5}=\frac{0'4975}{0'05}=9'95$$

En el intervalo de tiempo $\left[5,5'05\right]$, la altura ha variado 9’95 metros cada segundo.

Por consiguiente, cuanto más pequeña sea la amplitud del intervalo, más próxima estará la variación media a 10. Vamos a decir entonces que la variación instantánea para $t=5$ es 10.

Es decir, la variación instantánea en un punto *a* va a ser el valor al que se acerca la tasa de variación media en el intervalo $\left[a,a+h\right]$ cuando la amplitud del intervalo $\left(h\right)$ tiende a cero.

3.2. DEFINICIÓN DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA O DERIVADA EN UN PUNTO.

El ejemplo anterior nos sirve para definir la **VARIACION INSTANTÁNEA** en un punto a como el límite de la TVM en los intervalos $\left[a,a+h\right]$ cuando h tiende a cero (el intervalo tiende a ser el punto *a*, es decir, un “instante”):

$$TVI\left(a\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$$

Al valor de este límite también lo denominamos **DERIVADA DE LA FUNCIÓN $f\left(x\right)$ EN EL PUNTO *a*, notado $f'\left(a\right)$.**

Así, dada una función $f\left(x\right)$ y un punto *a* de su dominio, definimos la **derivada de la función $f\left(x\right)$ en el punto *a*,** designado $f'\left(a\right)$, como el límite:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

3.3. CÁLCULO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

En el ejemplo que hemos visto en la pregunta 3.1 hemos calculado una tasa de variación instantánea por aproximaciones, sustituyendo en la tasa de variación media de un intervalo cada vez más pequeño y próximo al punto. Pero puesto que esta variación instantánea o derivada va a ser el resultado de calcular un límite, lo más adecuado será utilizar las técnicas que hemos aprendido para hallar el valor de un límite en un punto.

Ejemplo:

Calcula la derivada de la función $f(x)=3x^2-5x$ en el punto $x=2$.

Hemos de realizar dos cálculos:

1) Hallar la TVM en el intervalo $\left[2,2+h\right]$
2) Calcular el límite de la expresión que hayamos obtenido como TVM cuando *h* tiende a cero.

1) $TVM_{[2,2+h]}=\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$f(2+h)$ es la imagen del punto $x=2+h$, luego para calcularlo no tenemos más que sustituir en la función el valor de *x* por $2+h$, y realizar las operaciones:

$$f(2+h)=3\cdot(2+h)^2-5(2+h)=3\left(2^2+2\cdot 2\cdot h+h^2\right)-5(2+h)=$$
$$=3\left(4+4h+h^2\right)-5(2+h)=12+12h+3h^2-10-5h=3h^2+7h+2$$

$$f(2)=3\cdot 2^2-5\cdot 2=3\cdot 4-5\cdot 2=12-10=2$$

Sustituyendo:

$$TVM_{[2,2+h]}=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{3h^2+7h+2-2}{h}=\frac{3h^2+7h}{h}$$

2) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+7h}{h}$

Este límite lo calculamos por el método estudiado en el tema correspondiente:

- Sustituyendo, queda: $\frac{3\cdot 0^2+7\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}$ INDETERMINACIÓN
- Por tanto, tenemos que descomponer el numerador:

  En este caso, sacamos factor común $3h^2+7h=h(3h+7)$

- Nos queda:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+7h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h+7)}{h}=\lim_{h\to 0}(3h+7)=3\cdot 0+7=7$$

Por tanto, $f'(2)=7$; la derivada de la función $f(x)=3x^2-5x$ en el punto $x=2$ es 7.

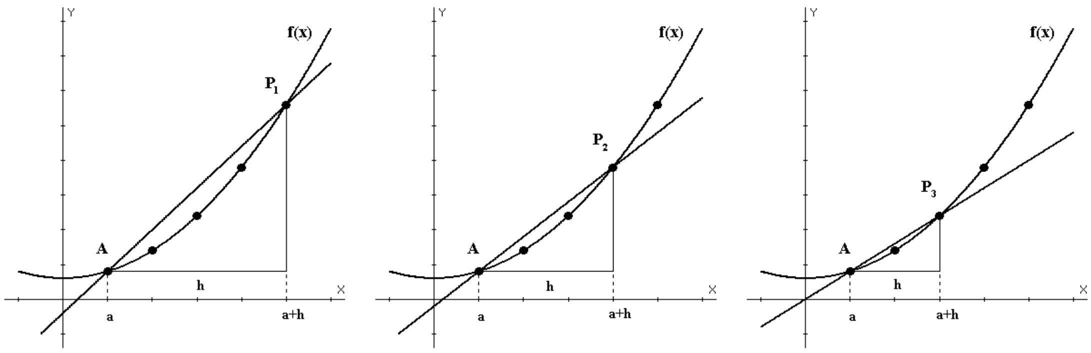
Ejercicio:

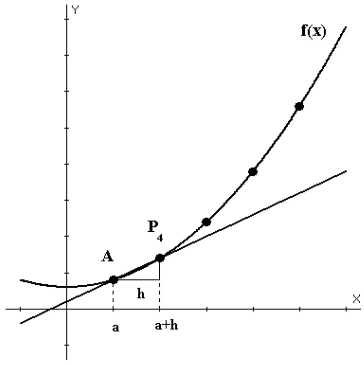
Calcula $g'(3)$ para la función $g(x)=-5x^2+2x-1$

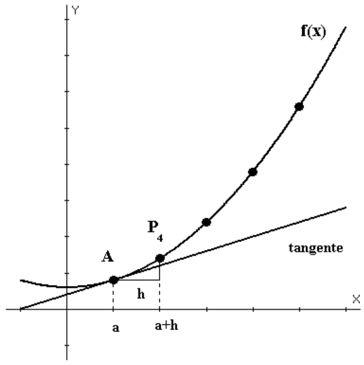
3.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

En el punto 2.3. hemos estudiado que la TVM de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Para calcular la derivada en el punto $x=a$, hemos calculado primero la TVM en el intervalo $[a,a+h]$, y después el límite de estas TVM cuando h tiende a cero. Según lo expresado en el párrafo anterior, la TVM en $[a,a+h]$ es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$. ¿Qué ocurre cuando *h* tiende a cero? Según observamos en las gráficas siguientes, cuanto menor sea *h*, esto es, más próximo esté *h* a cero, la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ se irá acercando cada vez más a la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$.







Por tanto, cuanto menor sea *h*, más se aproximará la pendiente de la recta secante a la pendiente de la recta tangente. Como cuando *h* tiende a cero las pendientes de las rectas tangentes (= TVM) tienden a la derivada (la derivada es el límite de las TVM cuando *h* tiende a cero) la conclusión es que:

LA DERIVADA EN EL PUNTO *a* DE LA FUNCION $f(x)$ COINCIDE CON LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA $f(x)$ EN EL PUNTO $\left(a, f(a)\right)$.

<u>Ejemplo:</u>

Pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x$ en $x = 1$.

Será el valor de $f'(1)$:

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 3(1+h) = 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h = h^2 - h - 2$$
$$f(1) = 1^2 - 3\cdot 1 = 1 - 3 = -2$$
$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 - h - 2 - (-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 - h - 2 + 2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 - h}{h}$$

El límite $\lim_{h\to 0}\frac{h^2 - h}{h}$ es una INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$

Factorizando el numerador: $h^2 - h = h(h-1)$, nos queda:

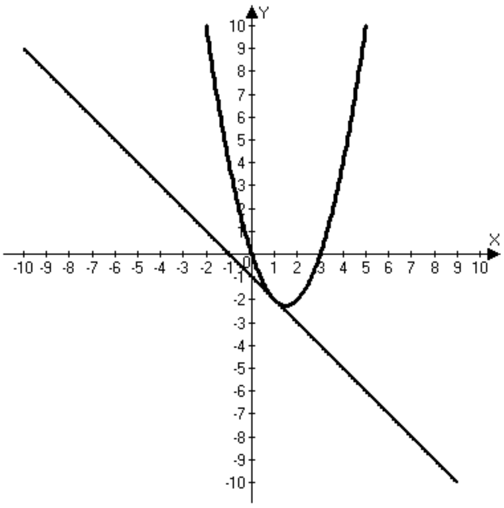
$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h-1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h-1) = -1$$

Luego $f'(1) = -1$.

Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3x$ es $m = -1$.

Lo vemos gráficamente:

La recta tangente en $x=1$ es paralela a la bisectriz de los cuadrantes 2º y 4º.



Ejercicio:

a) Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva $g(x)=x^2-4$ en el punto $x=-1$.
b) Halla la ecuación de dicha recta tangente a la curva.
c) Representa gráficamente la parábola y la recta calculada en el ejercicio anterior y comprueba que efectivamente es tangente a la curva para $x=-1$.

3.5. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Sabemos que la derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea, o lo que es lo mismo, el límite de las tasas de variación media cuando la amplitud del intervalo tiende a ser cero. Veamos qué significado tiene esto cuando las variables que intervienen son variables físicas.

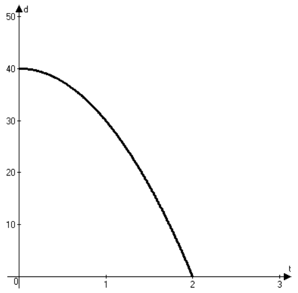
Ejemplo:

Un saltador se encuentra en un acantilado de 40 m. de altura y se lanza al mar. La distancia a la que se encuentra del agua varía con el tiempo y viene expresada mediante la función $d(t)=40-10t^2$.

Sustituyendo en la función podemos calcular la distancia a que se encuentra del agua el deportista, de manera que hemos construido la siguiente tabla:

Tiempo (t)	0	0’5	1	1’5	1’8	2
Distancia al agua (d)	40	37’5	30	17’5	7’6	0

La gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



La pregunta que nos hacemos es, si a partir de los datos anteriores, podemos saber cuál es la velocidad que llevaba para $t = 1'5$ seg.

Observando la tabla y teniendo en cuenta los datos del enunciado, lo que sabemos es que el espacio total recorrido ha sido de 40 m., y ha tardado 2 seg. en recorrerlo, con lo que, la velocidad media durante el salto ha sido:

$$v_m = \frac{\text{espacio total}}{\text{tiempo total}} = \frac{40\,m}{2\,s} = 20\,m/s$$

Pero esto no significa que esa haya sido la velocidad durante todo el salto. Hemos de tener en cuenta que la velocidad no ha sido constante, puesto que es un movimiento de caída libre, por lo que la velocidad ha ido aumentando según transcurría el tiempo.

Vamos entonces a calcular las TASAS DE VARIACION MEDIA en intervalos de tiempo en los que el extremo inicial sea 1’5 seg.

A partir de la tabla, podemos deducir que la $TVM_{[1'5,2]}$ ha sido:

$$TVM_{[1'5,2]} = \frac{d(2) - d(1'5)}{2 - 1'5} = \frac{0 - 17'5}{2 - 1'5} = \frac{-17'5}{0'5} = -35\,m/s$$

Podemos decir que desde el instante 1’5 seg. hasta los 2 seg. ha recorrido 17’5 m, luego esta TVM nos indica que en 0’5 seg. ha recorrido 17’5 m.; por tanto, la velocidad media en este tramo (de los 1’5 seg. a los 2 seg.) ha sido de 35 m/s.

El signo negativo indica que el movimiento es descendente.

Si ahora calculamos la TVM disminuyendo la amplitud del intervalo, por ejemplo, eligiendo $[1'5, 1'8]$, obtenemos:

$$TVM_{[1'5,1'8]} = \frac{d(1'8) - d(1'5)}{1'8 - 1'5} = \frac{7'6 - 17'5}{1'8 - 1'5} = \frac{-9'9}{0'3} = -33\,m/s$$

Luego esta TVM nos indica que la velocidad media en el tramo de tiempo $[1'5, 1'8]$ ha sido de 33 m/s.

Una primera conclusión es que, en una gráfica de espacio/tiempo, **LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA** indica la velocidad media en ese intervalo de tiempo.

Pero además, si disminuimos el intervalo de tiempo cada vez más, estaremos calculando la velocidad media en intervalos cada vez más pequeños. Si hacemos que esta amplitud de los intervalos tienda a cero, estaremos calculando la **velocidad instantánea** en 1’5 seg.

Como la velocidad medía en un intervalo es la TVM en dicho intervalo, calcular la velocidad instantánea va a ser lo mismo que hallar la derivada de la función para ese valor de tiempo, puesto que la derivada de una función en un punto es el límite de las TVM cuando la amplitud del intervalo tiende a cero.

CONCLUSIÓN:

Dada una gráfica de espacio/tíempo, LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN EN UN PUNTO ES LA VELOCIDAD INSTANTANEA EN DICHO PUNTO.

En consecuencia, para el ejemplo anterior:

$$d(t) = 40 - 10t^2$$

La velocidad para $t = 1'5$ seg. es: $v(1'5) = d'(1'5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(1'5+h) - d(1'5)}{h}$

Sustituyendo:

$$d(1'5+h) = 40 - 10(1'5+h)^2 = 40 - 10\left(1'5^2 + 2\cdot 1'5\cdot h + h^2\right) =$$
$$= 40 - 10\left(2'25 + 3h + h^2\right) = 40 - 22'5 - 30h - 10h^2 = -10h^2 - 30h + 17'5$$

$$d(1'5) = 40 - 10(1'5)^2 = 40 - 10(2'25) = 40 - 22'5 = 17'5$$

$$v(1'5) = \lim_{h\to 0} \frac{d(1'5+h) - d(1'5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-10h^2 - 30h + 17'5 - 17'5}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-10h^2 - 30h}{h} \qquad \left(\text{IND. } \frac{0}{0}\right)$$

$$v(1'5) = \lim_{h\to 0} \frac{-10h^2 - 30h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-10h - 30)}{h} = \lim_{h\to 0}(-10h - 30) = -30 \ m/s$$

Es decir, la velocidad instantánea para $t = 1'5$ seg. es 30 m/s.

Ejercicio:

¿Sabrías calcular la velocidad con la que el saltador cae en el agua?

De igual modo, cuando la gráfica que estemos estudiando sea de velocidad/tiempo, la tasa de variación media medirá la variación de velocidad en función del tiempo, esto es, la aceleración media en un intervalo, y la derivada será, por tanto, la aceleración instantánea en un momento determinado de tiempo.

4. FUNCIÓN DERIVADA.

4.1. INTRODUCCIÓN.

En el ejemplo de 2 la pregunta anterior hemos visto que para la función $d(t)=40-10t^2$ la derivada en $t=1'5$ era $d'(1'5)=-30$.

Vamos a ver a partir del resultado en otros puntos si podemos calcular la derivada en cualquier punto de la función:

Para $t=1$:

$$d(1+h)=40-10(1+h)^2=40-10\left(1^2+2\cdot 1\cdot h+h^2\right)=$$
$$=40-10\left(1+2h+h^2\right)=40-10-20h-10h^2=-10h^2-20h+30$$

$$d(1)=40-10\cdot 1^2=40-10\cdot 1=40-10=30$$

$$d'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{d(1+h)-d(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-10h^2-20h+30-30}{h}==\lim_{h\to 0}\frac{-10h^2-20h}{h}$$

Sustituyendo h por 0 aparece una INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$ que resolvemos factorizando el numerador:

$$d'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{-10h^2-20h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-10h-20)}{h}=\lim_{h\to 0}(-10h-20)=-20\ m/s$$

Por tanto, $d'(1)=-20\ m/s$

Para $t=2$:

$$d(2+h)=40-10(2+h)^2=40-10\left(2^2+2\cdot 2\cdot h+h^2\right)=$$
$$=40-10\left(4+4h+h^2\right)=40-40-40h-10h^2=-10h^2-40h$$

$d(2) = 40 - 10 \cdot 2^2 = 40 - 10 \cdot 4 = 40 - 40 = 0$

Con lo que:

$$d'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-10h^2 - 40h}{h}$$

Volvemos a tener una INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$, y factorizando:

$$d'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{-10h^2 - 40h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-10h - 40)}{h} = \lim_{h \to 0} (-10h - 40) = -40 \ m/s$$

En consecuencia, $d'(2) = -40$.

Observemos los tres resultados anteriores:

t	1	1’5	2
d'(t)	-20	-30	-40

Podemos darnos cuenta de que la derivada en un punto es -20 multiplicado por dicho número, es decir, para un valor cualquiera *x* parece ser que $d'(t) = -20t$.

Luego en este caso, si realmente fuese cierto lo anterior, tendríamos una expresión algebraica que nos serviría para calcular la derivada en cualquier punto, no teniendo más que sustituir por dicho punto. A dicha función la llamaríamos **Función Derivada.**

Comprobemos que efectivamente la función anterior nos sirve para calcular la derivada en cualquier punto de la función $d(t) = 40 - 10t^2$.

Para ello calcularemos la derivada en un punto genérico t:

$$d(t+h) = 40 - 10(t+h)^2 = 40 - 10\left(t^2 + 2 \cdot t \cdot h + h^2\right) = 40 - 10\left(t^2 + 2th + h^2\right) =$$
$$= 40 - 10t^2 - 20th - 10h^2$$

$$d(t) = 40 - 10t^2$$

De donde la TVM en $[t, t+h]$ es:

$$TVM_{[t,t+h]} = \frac{d(t+h) - d(t)}{h} = \frac{40 - 10t^2 - 20th - 10h^2 - \left(40 - 10t^2\right)}{h} =$$

$$=\frac{40-10t^2-20th-10h^2-40+10t^2}{h}=\frac{-20th-10h^2}{h}$$

De donde:

$$d'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{d(t+h)-d(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-20th-10h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-20t-10h)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}(-20t-10h)=-20t$$

Luego, efectivamente, la derivada del punto *t* es $-20t$.

En consecuencia, $d'(t)=-20t$ es la función derivada de $d(t)=40-10t^2$.

De manera que, sin más que sustituir, podemos calcular la derivada en cualquier punto:

$$d'(0'5)=-20\cdot 0'5=-10,\ d'(1'2)=-20\cdot 1'2=-24,\ d'(1'6)=-20\cdot 1'6=-32,...$$

4.2. DEFINICIÓN.

Dada una función cualquiera $f(x)$, llamamos **FUNCIÓN DERIVADA de** $f(x)$ a la función (expresión algebraica) que nos permite calcular la derivada en cualquier punto para la función $f(x)$. A la función derivada la notamos $f'(x)$.

Ejemplo:

Dada la función $f(x)=x^2-3$, calcula $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(-5)$.

Lo más adecuado es calcular la función derivada, y una vez que la conozcamos, no tenemos más que sustituir por los puntos anteriores:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f(x+h)=(x+h)^2-3=x^2+2xh+h^2-3$ y $f(x)=x^2-3$

Sustituyendo:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3-(x^2-3)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3-x^2+3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Por tanto, $f'(x)=2x$ es la función derivada de $f(x)=x^2-3$, por lo que:

$$f'(1)=2\cdot 1=2 \qquad f'(2)=2\cdot 2=4 \qquad f'(-5)=2\cdot(-5)=-10$$

Ejercicio 1:

Calcula la función derivada de $g(x)=3x-4$

Ejercicio 2:

Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=x^2-3$ en el punto de abscisa x=1.

5. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL.

Dada la función $f(x)=x^n$, su función derivada es $f'(x)=nx^{n-1}$

Comprobémoslo para $f(x)=x^2$:

$$f(x)=x^2; \qquad f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$$

de donde $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Por tanto, la función derivada de $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$

Ejemplos:

1) $f(x)=x^5 \Rightarrow f'(x)=5x^4$
2) $g(x)=x^6 \Rightarrow g'(x)=6x^5$
3) $h(x)=x^{-2} \Rightarrow h'(x)=-2x^{-3}$

Nótese que con esta regla podemos calcular la derivada de funciones del tipo $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$, ya que se pueden expresar como una función potencial.

Ejercicio:

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^7$ b) $g(x)=x^{-1}$ c) $f(x)=\frac{1}{x^5}$

OBSERVACIÓN 1:

Cuando no se indique lo contrario, la expresión “derivada” se referirá a la función derivada. Una función se dirá derivable si podemos calcular la derivada en todos los puntos del dominio.

Por ejemplo, la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es derivable en todos los puntos excepto en 0:

Su derivada sería: $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

Ni $f(x)$ ni $f'(x)$ tienen sentido para $x=0$. La función $f(x)=x^{-2}$ no es derivable en $x=0$.

OBSERVACIÓN 2:

La derivada de las funciones constantes $f(x)=k$, es la función nula.

En efecto, si $f(x)=k$, la TVM es siempre nula con lo que el límite en cualquier punto es siempre 0.

Así, dada $f(x)=3$, su derivada es $f'(x)=0$.

6. PROPIEDADES DE LA DERIVADA.

6.1. DERIVADA DE LA SUMA.

Dadas dos funciones derivables, su suma es una función también derivable y su derivada es la suma de las derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)}$$

Ejemplo:

Dadas $f(x)=x^4$ y $g(x)=x^7$, entonces la derivada de $h(x)=x^4+x^7$ es $h'(x)=4x^3+7x^6$

6.2. DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA FUNCIÓN POR UN ESCALAR.

Dada una función derivable $f(x)$ y un escalar cualquiera *a*, entonces $a\cdot f$ también es derivable y su derivada es:

$$\boxed{(af)'(x)=a\cdot f'(x)}$$

Es decir, si multiplicamos una función por un número real, entonces la derivada también aparece multiplicada por dicho número.

Ejemplos:

a. $f(x)=5x^7 \Rightarrow f'(x)=5\cdot 7x^6=35x^6$
b. $g(x)=-3x^8 \Rightarrow g'(x)=-3\cdot 8x^7=-24x^7$

Ejercicio:

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=9x^5$
2) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$
3) $f(x)=x^4+x^{10}$
4) $f(x)=x^{-2}+5x^2$
5) $f(x)=\dfrac{2x^7}{3}$

6.3. DERIVADA DEL PRODUCTO.

Dadas dos funciones derivables $f(x)$ y $g(x)$, entonces su producto también es derivable y su derivada es:

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Ejemplo:

Sean $f(x) = 3x^5$ y $g(x) = x + 2$

Vamos a calcular la derivada de $f \cdot g$ utilizando la propiedad de la derivada del producto de dos funciones:

$$\left[\left(3x^5\right)\cdot(x+2)\right]' = \left(3x^5\right)' \cdot (x+2) + \left(3x^5\right)\cdot(x+2)' = 15x^4 \cdot (x+2) + 3x^5 \cdot 1 =$$
$$= 15x^5 + 30x^4 + 3x^5 = 18x^5 + 30x^4$$

Multipliquemos las funciones y seguidamente hallemos las derivadas y comprobemos que obtenemos la misma derivada:

$$(f \cdot g)(x) = \left(3x^5\right)\cdot(x+2) = 3x^6 + 6x^5 \Rightarrow (f \cdot g)'(x) = 18x^5 + 30x^4$$

Por tanto, obtenemos el mismo resultado.

Ejercicio:

Aplica la propiedad de la derivada del producto para derivar la función $f(x) = (2x-3)\cdot\left(5x^3 + 7x^2\right)$.

6.4. DERIVADA DEL COCIENTE.

Dadas dos funciones derivables $f(x)$ y $g(x)$ tales que $g(x) \neq 0$, entonces el cociente de $f(x)$ entre $g(x)$ es derivable y su derivada es:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Ejemplo:

Derivada de la función $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$

Aplicando la regla del cociente, su derivada es:

$$f'(x)=\frac{(2x-3)'(x+1)-(2x-3)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2\cdot(x+1)-(2x-3)\cdot 1}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{2x+2-(2x-3)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2}=\frac{5}{(x+1)^2}$$

OBSERVACIÓN:

La expresión de la función derivada hay que simplificarla todo lo posible.

Ejercicio:

Calcula la derivada de las funciones:

a) $f(x)=\frac{5x+4}{2x-3}$

b) $f(x)=\frac{3x^2-6x}{1-x^2}$

6.5. DERIVADA DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Hasta ahora hemos utilizado funciones más o menos simples. Sabemos, sin embargo, que podemos combinar varias funciones conocidas para construir otras más complejas. Es lo que llamamos la composición de funciones.

Así, la función $h(x)=(2x+7)^3$ es la composición de dos funciones:

$f(x)=2x+7$ y $g(x)=x^3$

Si calculamos la imagen de *g* no en *x*, sino en el valor que obtenemos al hallar $f(x)$, obtenemos $g(f(x))=(2x+7)^3$, es decir, la función de partida. Vamos a decir que esta función es la composición de *f* con *g*, y notaremos:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(2x+7)^3$$

Esta composición la podemos expresar gráficamente de la forma:

$$x \xrightarrow{f(x)} f(x) = 2x+7 \xrightarrow{g(f(x))} g(2x+7) = (2x+7)^3$$

Para realizar estos cálculos más fácilmente, lo más sencillo es utilizar otro nombre para la imagen de la función:

$f(x) = 2x+7$ Si llamamos *u* a esta imagen, quedaría:

$u = 2x+7$, $g(f(x)) = g(u) = u^3 = (2x+7)^3$

Ejemplo:

Componer $(h \circ k)(x)$ para las funciones $k(x) = 2x^3 - 7$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$.

Llamamos $u = k(x) = 2x^3 - 7$

$$(h \circ k)(x) = h(k(x)) = h(u) = \operatorname{sen} u = \operatorname{sen}(2x^3 - 7)$$

Ejercicio:

Dadas las funciones $f(x) = 2x - 7$, $g(x) = 2x^5$ y $h(x) = \ln x$, calcula:

a) $(g \circ f)(x)$
b) $(h \circ g)(x)$
c) $(f \circ h)(x)$

Cuando componemos dos funciones y queremos calcular la función derivada de la función resultante, la regla es:

Dadas dos funciones *f* y *g*, la derivada de $(g \circ f)$ es:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Ejemplo:

Derivada de $h(x) = (2x+3)^5$.

Lo primero es expresar la función como composición de otras dos:

Si llamamos $u = 2x+3$, entonces $h(x) = u^5$, luego $f(x) = 2x+3$ y $g(x) = x^5$, de manera que $(2x+3)^5 = u^5 = g(u) = g(f(x)) = g \circ f(x)$

Según la regla anterior $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$g'(f(x)) = g'(u) = 5u^4 = 5(2x+3)^4$

$f'(x) = 2$

Es decir, $(g \circ f)'(x) = 5(2x+3)^4 \cdot 2 = 10(2x+3)^4$.

Nótese que cuando tenemos la función de una función lo que hacemos es calcular la derivada en una función y multiplicarla por la derivada de ésta.

Así: $\left(\left(5x^2-6\right)^3\right)' = 3\left(5x^2-6\right)^2 \cdot 10x = 30x\left(5x^2-6\right)^2$

Ejercicio: Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(7x^3 - \frac{1}{2}x^4 + 5\right)^6$

b) $g(x) = \left(\frac{2x-1}{x-3}\right)^3$

7. DERIVADA DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES.

7.1. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL.

Ya la conocemos:

Dada $f(x) = x^n$, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Ejemplo:

Dada $f(x) = x^7$, $f'(x) = 7x^6$

7.2. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POLINÓMICA.

También lo sabemos:

Dada $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, entonces

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}$$

Ejemplo:

Dada la función $f(x)=2-\frac{1}{3}x+7x^2-\pi x^3+\sqrt{2}x^5$, entonces:

$$f'(x)=-\frac{1}{3}+14x-3\pi x^2+5\sqrt{2}x^4$$

7.3. DERIVADA DE LA FUNCIÓN RACIONAL.

Dada la función $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x)=\frac{P'(x)\cdot Q(x)-P(x)\cdot Q'(x)}{\left(Q(x)\right)^2}$

Si tenemos una composición:

$$f(x)=\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^n,\ f'(x)=n\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{n-1}\cdot\frac{P'(x)\cdot Q(x)-P(x)\cdot Q'(x)}{\left(Q(x)\right)^2}$$

En la última expresión habría que simplificar cuando fuese posible.

Ejemplo:

Derivada de la función $f(x)=\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^3$:

$$f'(x)=3\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^2\cdot\frac{2(x+4)-(2x-3)\cdot 1}{(x+4)^2}=3\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^2\cdot\frac{2x+8-2x+3}{(x+4)^2}=$$

$$=3\frac{(2x-3)^2}{(x+4)^2}\cdot\frac{11}{(x+4)^2}=\frac{33(2x-3)^2}{(x+4)^4}$$

No necesitamos realizar los productos que aparecen puesto que no se puede simplificar.

7.4. DERIVADA DE LA FUNCIÓN RADICAL.

El razonamiento es el mismo que para las funciones anteriores, sin más que utilizar la regla para las funciones potenciales y tener en cuenta la regla de la composición de funciones cuando sea necesaria.

Recordamos que la raíz de índice *n* se puede expresar como una función potencial de exponente $\frac{1}{n}$.

Así, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$, $\sqrt{3x-7} = (3x-7)^{\frac{1}{2}}$.

Una vez que tenemos expresada la función radical como una potencial le aplicaríamos la regla de derivación correspondiente.

a) Forma simple:

Dada la función $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$, su derivada es $f'(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$.

Ejemplos:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Evidentemente tenemos que utilizar las propiedades de las potencias para simplificar.

b) Forma compuesta:

Dada la función $g(x) = \left(f(x)\right)^{\frac{n}{m}}$, su derivada es $g'(x) = \frac{n}{m} \cdot \left(f(x)\right)^{\frac{n}{m}-1} \cdot f'(x)$

Ejemplo:

$$h(x) = \sqrt{3x^2-5} = \left(3x^2-5\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-5\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x =$$

$$= 3x\left(3x^2-5\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3x}{\left(3x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-5}}$$

Nótese que cuando tenemos una función radical hemos de saber expresarla como una función potencial para poder derivarla.

Además, de los ejercicios anteriores podemos deducir las siguientes reglas de derivación:

Dada $f(x) = \sqrt[n]{x}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Dada $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$, entonces $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\left(f(x)\right)^{n-1}}}$

Ejercicio:

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x}$
b) $f(x)=\sqrt[4]{x}$
c) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$
d) $f(x)=\sqrt[3]{2x-5}$

7.5. DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Vamos a distinguir si tenemos la forma simple de la función de la compuesta:

a) Forma simple:

Dada $f(x)=e^x$, entonces $f'(x)=e^x$

Dada $f(x)=a^x$, entonces $f'(x)=\ln a\cdot a^x$

b) Forma compuesta:

Dada $g(x)=e^{f(x)}$, entonces $g'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

Dada $g(x)=a^{f(x)}$, entonces $g'(x)=\ln a\cdot a^{f(x)}\cdot f'(x)$

Ejemplos:

Derivada de las siguientes funciones exponenciales:

1) $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$
2) $f(x)=3^x \Rightarrow f'(x)=\ln 3\cdot 3^x$
3) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Rightarrow f'(x)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
4) $f(x)=e^{7x-2} \Rightarrow f'(x)=e^{7x-2}\cdot 7=7e^{7x-2}$
5) $f(x)=5^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\ln 5\cdot 5^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ejercicio:

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=5\cdot 2^x$

b) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=6^{10x}$

7.6. DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA.

Distinguimos la forma simple de la compuesta:

a) Forma simple:

Dada $f(x)=\ln x$, su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Dada $f(x)=\log_a x$, su derivada es $f'(x)=\log_a e\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\ln a\cdot x}$

Ejemplo:

$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f'(x)=\log_2 e\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln 2\cdot x}$$

b) Forma compuesta:

Volvemos a aplicar la regla de la composición:

Dada $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$, su derivada es $g'(x)=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Dada $g(x)=\log_a\left(f(x)\right)$, su derivada es:

$$g'(x)=\log_a e\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\log_a e\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ejemplos:

$$f(x)=\ln(7x-2)\Rightarrow f'(x)=\frac{7}{7x-2}$$

$$f(x)=\log\left(x^2\right)\Rightarrow f'(x)=\log e\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\log e\cdot\frac{2x}{x^2}=\log e\cdot\frac{2}{x}=\frac{2\log e}{x}$$

Ejercicio:

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(x-1)$

b) $f(x)=\log_2\left(3x^2-7x\right)$

7.7. DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Distinguimos la forma simple de la compuesta:

a) Forma simple:

Dada $f(x)=\operatorname{sen} x$ su derivada es $f'(x)=\cos x$

Dada $f(x)=\cos x$ su derivada es $f'(x)=-\operatorname{sen} x$

b) Forma compuesta:

Dada $g(x)=\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$, su derivada es $g'(x)=\cos\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

Dada $g(x)=\cos\left(f(x)\right)$, su derivada es $g'(x)=-\operatorname{sen}\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

Ejemplos:

Dada $f(x)=\operatorname{sen}\left(7x^2\right)$, su derivada es $f'(x)=\cos\left(7x^2\right)\cdot 14x=14x\cos\left(7x^2\right)$

Dada $f(x)=\cos(12x)$, su derivada es $f'(x)=-\operatorname{sen}(12x)\cdot 12=-12\operatorname{sen}(12x)$

Ejercicio:

Calcula la derivada de las funciones $f(x)=\operatorname{sen}\left(e^x\right)$ y de $f(x)=\cos\left(5x^2-3x\right)$

7.8. DERIVADA DE LAS FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.

Hasta ahora hemos calculado la función derivada de funciones que tenían una sola expresión analítica; sin embargo, a lo largo del curso, es frecuente el uso de funciones definidas a trozos para explicar numerosos fenómenos de las ciencias sociales. Para calcular la derivada de estas funciones vamos a tener en cuenta lo siguiente:

- Si las ramas de la función son derivables, entonces la función es derivable en todos los puntos excepto los frontera, y la derivada la calculamos utilizando las reglas anteriores.
- En los puntos frontera, no sabemos si existe o no la derivada. Habrá que calcularla mediante la definición, esto es, hallando el límite de la TVM cuando *h* tiende a 0.
  Ahora bien, sabemos que todo límite se puede calcular por la derecha y por la izquierda, y para que dicho límite exista habrán de existir los dos límites laterales y además coincidir. Como la función toma expresiones distintas a la derecha y la izquierda del punto frontera, entonces también la TVM tomará dos expresiones distintas a la derecha y a la izquierda.

Surge así la idea de **DERIVADA POR LA DERECHA** y **DERIVADA POR LA IZQUIERDA.**

Por consiguiente, en el punto frontera, habrá que calcular:

- El límite de la TVM por la derecha. Si existe se le llamará derivada por la derecha.
- El límite de la TVM por la izquierda. Si existe se le llamará derivada por la izquierda.
- Existirá la derivada en ese punto si las derivadas laterales coinciden.

Ejemplo:

Estudiamos la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

Como las funciones $g(x)=x^2$ y $h(x)=2x-1$ son derivables, entonces la función $f(x)$ es derivable en todos los puntos excepto en $x=1$, y la derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad x>1 \end{cases}$$

En $x=1$ no sabemos si la función es derivable o no. Tenemos que calcular las derivadas laterales y comprobar si coinciden o no:

DERIVADA EN x=1:

a) Derivada por la izquierda:

$$f(1+h)=(1+h)^2=1+h^2+2h$$

$f(1)=1^2=1$, de donde $f'_-(1)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1+h^2+2h-1}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+2h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h(h+2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h+2)=2$

Por tanto, $f'_-(1)=2$

b) Derivada por la derecha:

$f(1+h)=2(1+h)-1=2+2h-1=2h+1$

$f(1)=1^2=1$, de donde

$f'_+(1)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2h+1-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}2=2$

Por tanto, $f'_+(1)=2$

En consecuencia, como las derivadas por la izquierda y por la derecha coinciden, la función es derivable en $x=1$ y la derivada en 1 vale 2. Podemos escribir que $f'(1)=2$.

Con lo cual la función derivada es $f'(x)=\begin{cases}2x & si \quad x<1\\ 2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$

Cuando las derivadas laterales no se puedan calcular o sean distintas, no existirá la derivada en ese punto.

OBSERVACION:

Las derivadas laterales en el punto frontera también se pueden calcular, siempre que la función sea continua, a partir de la función derivada de las dos ramas de la función.

Para el ejemplo anterior:

$f(x)=\begin{cases}x^2 & si \quad x<1\\ 2x-1 & si \quad x\geq 1\end{cases}$ y en un principio $f'(x)=\begin{cases}2x & si \quad x<1\\ 2 & si \quad x>1\end{cases}$

Como la función $f(x)$ es continua (véase su gráfica) entonces podemos calcular las derivadas laterales en $x=1$ de la siguiente manera:

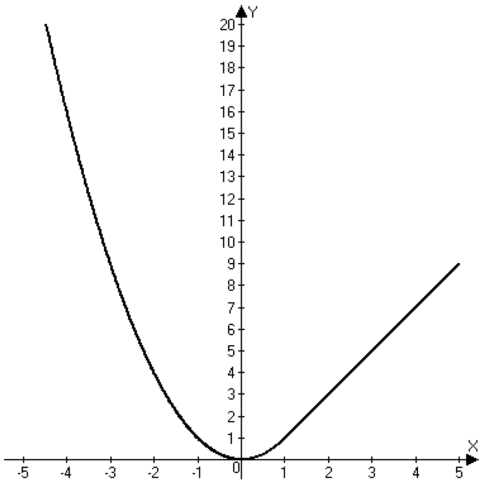
- Derivada por la derecha:

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}2=2$

- Derivada por la izquierda:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}(2x) = 2\cdot 1 = 2$$

Obtenemos el mismo resultado que con el método empleado anteriormente.



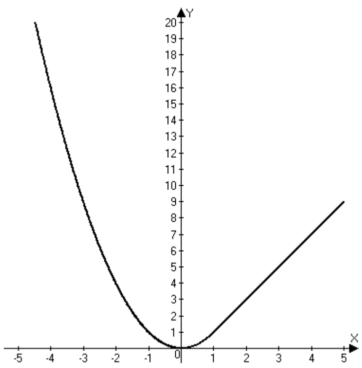
Ejercicio:

Calcula la función derivada de $g(x) = \begin{cases} 3x-1 & si \quad x<2 \\ x^2+1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

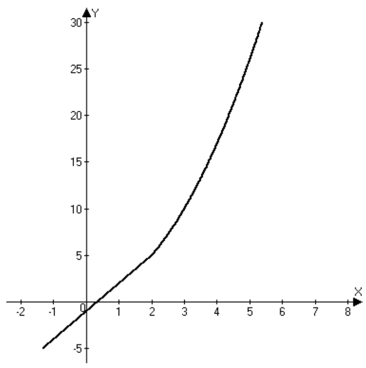
8. ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU GRÁFICA.

En la pregunta anterior hemos estudiado dos funciones definidas a trozos, resultando que una es derivable en todo el dominio y la otra posee un punto donde no es derivable.

Fijémonos en sus gráficas:



$f(x)$



$g(x)$

La pregunta que nos hacemos ahora es si a partir de la gráfica de una función podemos saber en qué puntos es derivable y en cuáles no.

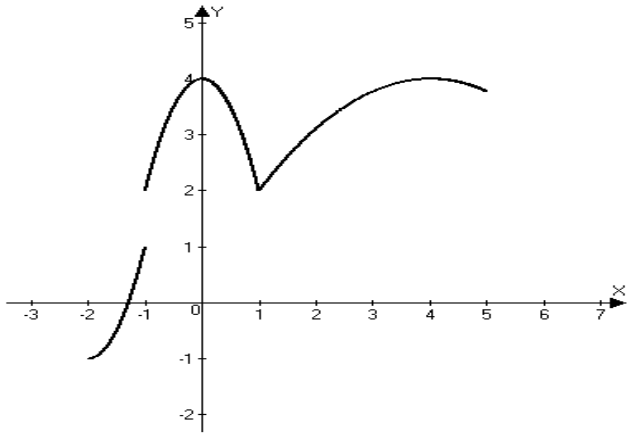
Es decir, ¿qué tiene la gráfica de la función $g(x)$ que nos indica que no existe la derivada en $x=2$, y en qué se diferencia de ella la gráfica de la función $f(x)$ que hace que sí sea derivable en $x=1$?

Para responder a esta pregunta hemos de recordar la interpretación geométrica de la derivada: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Por tanto, una función no será derivable en un punto cuando:

- la recta tangente no tenga pendiente o
- no se pueda calcular la recta tangente en dicho punto.

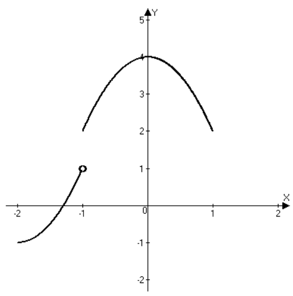
La primera condición se cumplirá cuando la recta tangente sea vertical ($\text{tg}\,90^{\circ}$ no existe).

¿Cuándo no se podrá calcular la recta tangente en un punto? Observemos la siguiente gráfica:



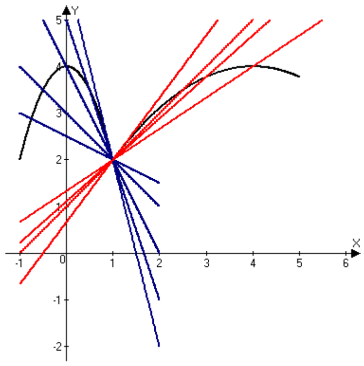
Comparemos lo que ocurre en los puntos $x=-1,\ x=1$ y $x=3$:

- En $x=-1$ la función no es continua. Esto hace que no podamos dibujar la recta tangente:



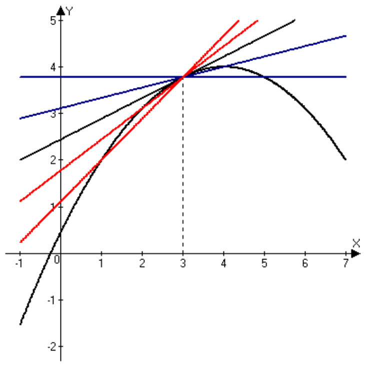
- En $x=1$ la función es continua, pero habría dos rectas tangentes, una por la derecha y otra por la izquierda: las derivadas laterales no coinciden: la función no es derivable en $x=1$. En $x=1$ tenemos lo que llamamos un **punto anguloso.**

Trazando las rectas secantes, por la izquierda se acercan a una recta y por la derecha a otra.



- En $x=3$ la función es continua y podemos trazar la recta tangente. La función es derivable en este punto.

En este caso, las rectas secantes, tanto por la derecha como por la izquierda se van acercando a una misma recta: la recta tangente A la curva en x=2



A partir de aquí podemos concluir: Existen tres tipos de puntos de acuerdo a la derivabilidad de una función:

1) Puntos donde la función no es continua: En ellos la función tampoco es derivable.

2) Puntos angulosos: Aquellos en los que la función es continua pero no derivable porque las derivadas laterales no coinciden.

3) Puntos no angulosos: Son aquellos en los que la función es continua y además derivable.

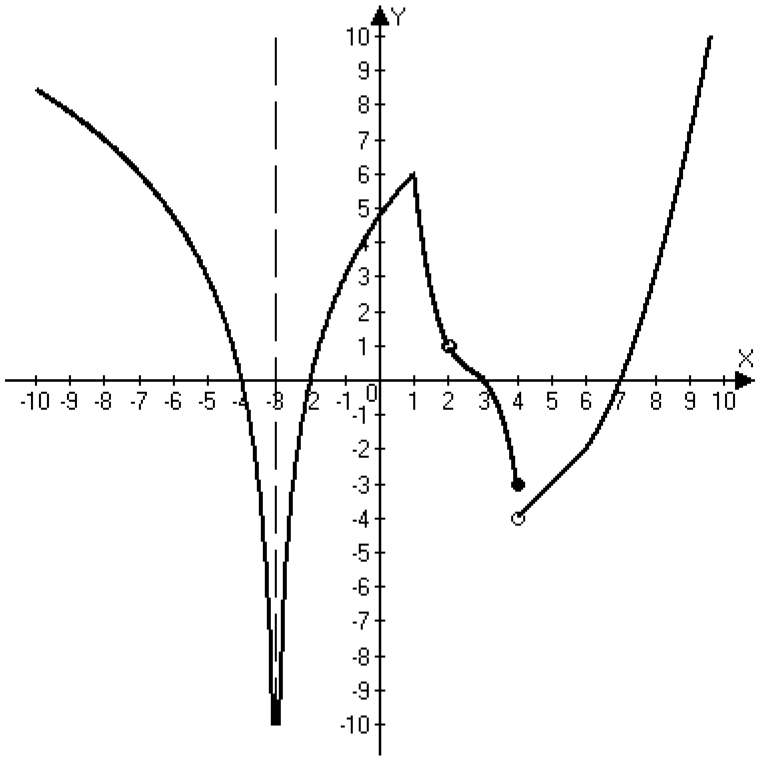
Nótese que de todo lo anterior deducimos:

- ✓ Si una función no es continua en un punto, tampoco es derivable.
- ✓ Si una función es derivable en un punto, también es continua

- ✓ Si una función es continua en un punto, no sabemos si es derivable o no. dependerá de la función.

Ejercicio:

Explica en qué puntos no es derivable una función cuya gráfica es la siguiente:



9. DERIVADAS SUCESIVAS.

Hasta ahora hemos estudiado cómo calcular la función derivada de una función. Pero como la función derivada es una nueva función, también podrá admitir que calculemos su derivada: sería la derivada de la derivada, es decir, **la segunda derivada de la función de partida.** El proceso podría continuarse calculando la función derivada de la función derivada de la función derivada de la función de partida, o lo que es lo mismo, **la derivada tercera de la función de partida**. El proceso podrá continuarse o no dependiendo de la función que estemos estudiando.

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^5$; su función derivada es $f'(x) = 5x^4$.

A esta nueva función también podemos calcularle su derivada. Será la segunda derivada de $f(x)$, notado $f''(x)$:

$f''(x) = \left(5x^4\right)' = 20x^3$

La derivada de esta función será la tercera derivada de $f(x)$, notado $f'''(x)$:´

$f'''(x) = \left(20x^3\right)' = 60x^2$

El proceso lo podemos continuar:

La cuarta derivada de $f(x)$ es $f^{iv}(x) = \left(60x^2\right)' = 120x$.

Ejercicio:

Calcula las cinco primeras derivadas de las funciones:

a) $f(x) = 3x^4 - 7x$
b) $g(x) = \operatorname{sen} x$

EJERCICIOS DE DERIVADAS

1) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$, halla:

   1) La variación de dicha función entre 1 y 3.
   2) Un punto *t* tal que la variación entre 0 y *t* sea de 8 unidades.
   3) Dos puntos entre los que la variación de la función sea 0.

2) Una empresa ha comprobado que la demanda de artículos de un producto, en función del precio, viene dada por la expresión $d(x) = 700 - 3x^2$. Calcula:
   1) La variación de la demanda si el precio pasa de 5 a 10 euros por unidad.¿La variación es positiva o negativa?
   2) La variación media correspondiente a los intervalos $[5,10]$, $[5,7]$, $[5,6]$, $[5,5'1]$, $[5,5'01]$
   3) La variación instantánea en *x=5*.

3) Dada la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, calcula la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto *x=2*.

4) Halla la ecuación de la tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 + x$ en el punto de abscisa x=2.

5) En cultivos de 100 bacterias se ha observado que su crecimiento viene determinado por la función $f(t) = t^2 + 10t + 100$, donde *t* indica el tiempo en minutos. ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la población al cabo de 15 minutos?

6) Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}(1 - x + x^2)$

   1) Calcula $f'(2)$
   2) ¿Qué significado tiene $f'(2)$?
   3) Halla el punto de corte de la recta tangente a la curva en *x=2* con el eje de abscisas.

7) Halla las derivadas de las funciones siguientes, en los puntos que se indican, utilizando la definición:

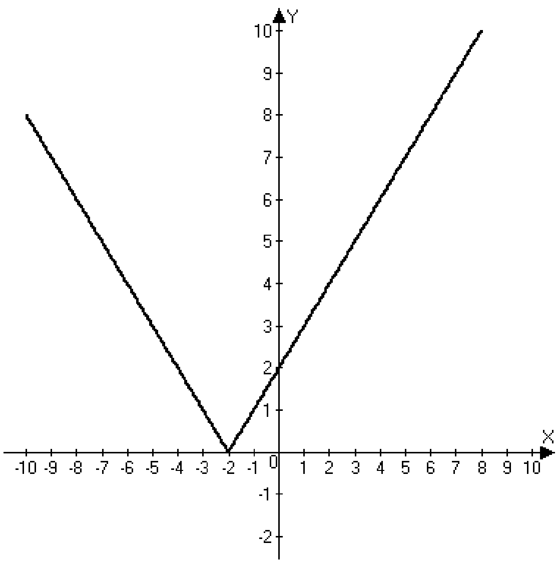
   1) $f(x) = 4x - 3$ en $x = 2$
   2) $g(x) = x^2 - x + 1$ en $x = 1$
   3) $h(x) = \dfrac{1-x}{x+2}$ en $x = -1$

8) Obtén los puntos de la función $f\left(x\right)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+1$ en donde la recta tangente sea paralela al eje de abscisas.

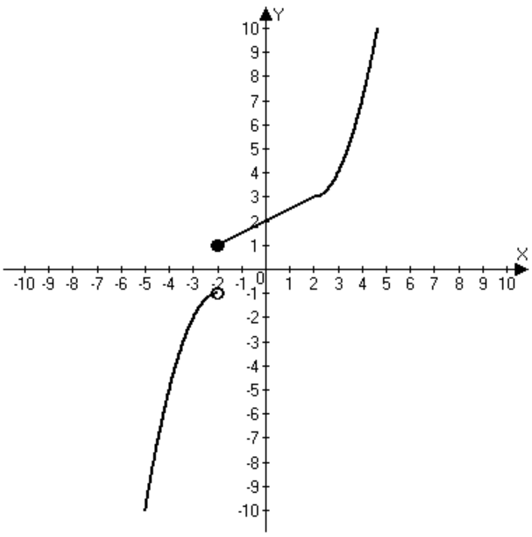
9) La posición en función del tiempo de un móvil es $f\left(t\right)=5t^2-30t+20$, en donde t viene expresado en segundos y $f\left(t\right)$ en metros.

1) ¿Qué velocidad lleva a los 10 segundos?
2) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que alcance una velocidad de l0 m/s?
3) ¿Es la aceleración constante?

10) La función $f\left(x\right)=\left|x+2\right|$, ¿es derivable en $x=-2$? ¿Y en $x=2$?



11) Dada la función:



1) ¿Es continua en $x=-2$, $x=0$ y $x=2$?
2) ¿Es derivable en los puntos anteriores?
3) En $x=2$, ¿existe recta tangente?
4) Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal para $x=0$.

12) Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=3$
2) $f(x)=\log e$
3) $f(x)=5x^2$
4) $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x$
5) $f(x)=\sqrt{2}x^4-5x^3$
6) $f(x)=\sqrt{x}$
7) $f(x)=x^{-4}$
8) $f(x)=\sqrt[3]{x}$
9) $f(x)=\sqrt{x}+5x^2+\frac{1}{3}x^{-2}-2\sqrt[3]{x}$
10) $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}$
11) $f(x)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+5$
12) $f(x)=-\frac{1}{x^3}+x^4+\operatorname{sen} x$
13) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$
14) $f(x)=\frac{3x-4x^2}{6}$
15) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$
16) $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-5x^3+7\right)$
17) $f(x)=\frac{2x^2}{\operatorname{sen} x}$
18) $f(x)=e^x$
19) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x+1}$
20) $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$
21) $f(x)=5\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^2$
22) $f(x)=e^{3x^2+6x}$
23) $f(x)=\frac{(2x-1)^4}{x+3}$
24) $f(x)=\left(\frac{x^2-1}{3x+5}\right)^2$
25) $f(x)=\ln x$
26) $f(x)=\ln(\operatorname{sen} x)$
27) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
28) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$
29) $f(x)=\log(2x)$
30) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$
31) $f(x)=\cos x$
32) $f(x)=\cos\left(x^2-1\right)$
33) $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^3-\frac{x}{3}\right)$
34) $f(x)=\operatorname{sen}\left(5x-e^x\right)$
35) $f(x)=x\cdot\ln x-x$
36) $f(x)=\operatorname{sen}(2x)\cdot\cos\left(x^2\right)$
37) $f(x)=\operatorname{sen}^2(4x)$
38) $f(x)=\cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x$

13) Calcula las rectas tangente y normal a la curva de la función $f(x)=\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}$ en el punto de abscisa $x=1$.

14) Halla las tres primeras derivadas de las funciones:

a) $f(x)=7x^4-12x^3+4$

b) $g(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$

15) Calcula $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ y $g^{iv}(1)$ para la función $g(x)=2x^3-\dfrac{5}{3}x^2+\pi x$

16) Una mancha de petróleo tiene 40 metros. Calcula:

a) La variación que sufre su área si el radio aumenta 5 metros.
b) La tasa de variación media al pasar el radio de 40 a 45 metros.
c) La tasa de variación media al pasar el radio de 40 a 42 metros.
d) La tasa de variación instantánea.

17) Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq 2 \\ 2x & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.
b) Estudia su derivabilidad.

18) Determina el valor de x para que la función $f(x)=-x^2+6x-11$ tenga derivada nula.

19) Calcula el valor de m para que la derivada de la función $f(x)=\dfrac{mx^2+1}{2x+m}$ en $x=\dfrac{1}{2}$ valga 1.

20) Halla las ecuaciones de la tangente a la curva $y=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{3}{2}$ en los puntos en que su ordenada es igual a su abscisa.

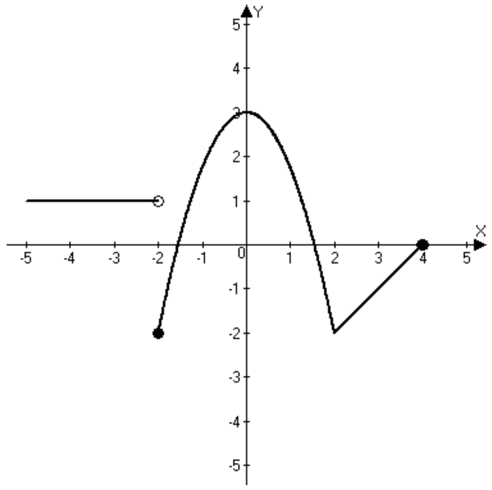
21) Calcula los puntos en los que la tangente a la curva $y=\dfrac{x^3}{2}-x^2-3x+1$ es paralela a la recta $y=5x+3$. Halla la recta normal en dichos puntos.

22) Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto $(3,4)$ y que la tangente en el punto $(-1,1)$ vale 1 .

23) Se ha trazado una recta tangente a la curva $y=x^3$ cuya pendiente es $m=3$ y pasa por el punto $P(0,-2)$. Hallar el punto de tangencia.

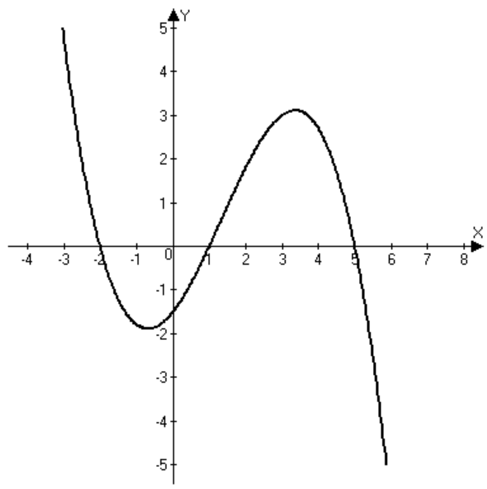
24) Hallar el área del triángulo determinado por los dos ejes de coordenadas y la tangente a la curva $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en el punto $x=1$.

25) Dada la función de la figura:



1) ¿Es continua en $x=-2$, $x=0$ y $x=2$? ¿Por qué?
2) ¿Es derivable en los puntos anteriores?
3) Explica si existe recta tangente en $x=2$.
4) Determina las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva en $x=0$.
5) A partir de la gráfica, relaciona el signo de la derivada con la monotonía.

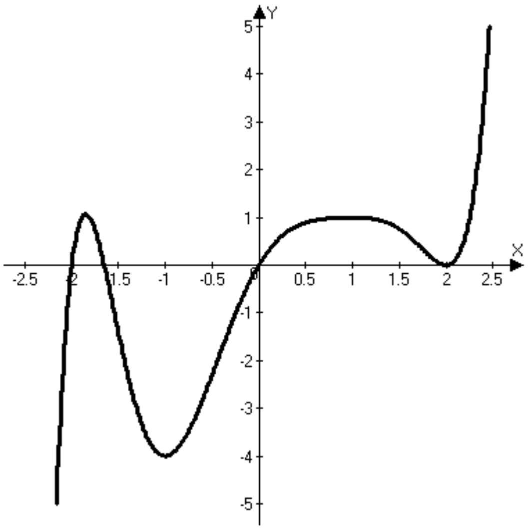
26) La gráfica de una función *f* es:



Completa con los signos + o - el siguiente cuadro:

x	-2	-1	0	2	4
$f'(x)$					

27) La gráfica de f' en $[-2'5, 2'5]$ es:



Calcula:

1) Intervalos de monotonía de *f*
2) Extremos relativos de *f*.

RELACIÓN DE DERIVADAS RESUELTAS

1) $f(x)=\left(2x^2-x+3\right)^3$

$f(x)=\left(g(x)\right)^3 \Rightarrow f'(x)=3\left(g(x)\right)^2\left(g'(x)\right)$.

Así:

$$f'(x)=3\left(2x^2-x+3\right)^2(4x-1)=(12x-3)\left(2x^2-x+3\right)^2$$

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

Así:

$$f'(x)=\frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{5}$

Se puede considerar de dos maneras:

$$f(x)=kx^2 \Rightarrow f'(x)=2kx$$

Así:

$$f(x)=\frac{1}{5}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}2x=\frac{2x}{5}$$

O:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

Así:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot 5-x^2\cdot 0}{5^2}=\frac{10x}{25}=\frac{2x}{5}$$

4) $f(x)=\left(x^2-2\right)\left(3x^4+x^3-1\right)^5$

$$f(x)=g(x)h(x)\Rightarrow f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$$

A su vez, $h(x)=\left(j(x)\right)^5\Rightarrow h'(x)=5\left(j(x)\right)^4 j'(x)$

Así:

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x\left(3x^4+x^3-1\right)^5+\left(x^2-2\right)5\left(3x^4+x^3-1\right)^4\left(12x^3+3x^2\right)=\\&=\left(3x^4+x^3-1\right)^4\left(2x\left(3x^4+x^3-1\right)+5\left(x^2-2\right)\left(12x^3+3x^2\right)\right)=\\&=\left(3x^4+x^3-1\right)^4\left(6x^5+2x^4-2x+60x^5+15x^4-120x^3-30x^2\right)=\\&=\left(3x^4+x^3-1\right)^4\left(66x^5+17x^4-120x^3-30x^2-2x\right)\end{aligned}$$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2}$

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-2\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{3x^4-6x^2-2x^4}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{x^4-6x^2}{\left(x^2-2\right)^2}$$

6) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^3-1}$

$$f'(x)=\frac{(2x-5)\left(x^3-1\right)-\left(x^2-5x\right)3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}=\frac{2x^4-2x-5x^3+5-\left(3x^4-15x^3\right)}{\left(x^3-1\right)^2}=$$

$$=\frac{-x^4+10x^3-2x+5}{\left(x^3-1\right)^2}$$

7) $f(x)=\dfrac{7}{x^2}$

Se puede interpretar de dos formas:

$f(x)=\dfrac{7}{x^2}=7x^{-2}$, y se deriva como una potencia:

$$f'(x)=-14x^{-3}=-\frac{14}{x^3}$$

O se puede considerar como un cociente de funciones y entonces:

$$f'(x)=\frac{0\cdot x^2-7\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{-14x}{x^4}=-\frac{14}{x^3}$$

8) $f(x)=\dfrac{\left(5x^2-3\right)^3}{4x^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(3\left(5x^2-3\right)^2 10x\right)\cdot 4x^2-\left(5x^2-3\right)^3\cdot 8x}{\left(4x^2\right)^2}=\frac{120x^3\left(5x^2-3\right)^2-\left(5x^2-3\right)^3\cdot 8x}{16x^4}=$$

$$=\frac{\left(5x^2-3\right)^2\left(120x^3-\left(5x^2-3\right)\cdot 8x\right)}{16x^4}=\frac{\left(5x^2-3\right)^2\left(120x^3-40x^3+24x\right)}{16x^4}=$$

$$=\frac{\left(5x^2-3\right)^2\left(80x^3+24x\right)}{16x^4}=\frac{\left(5x^2-3\right)^2 8x\left(10x^2+3\right)}{16x^4}=\frac{\left(5x^2-3\right)^2\left(10x^2+3\right)}{2x^3}$$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+5}$

Se puede plantear de dos maneras:

Como derivada de una raíz:

$$f(x)=\sqrt{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

Así:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot 2x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

O como derivada de una potencia:

$$f(x)=\sqrt{x^2+5}=\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}-1}2x=\frac{1}{2}\left(x^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}2x=$$
$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

10) $f(x)=\sqrt[3]{3x^2}$

Esta también se puede realizar de dos maneras, como la anterior. La haremos como una potencia:

$$f(x)=\sqrt[3]{3x^2}=\left(3x^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\left(3x^2\right)^{\frac{1}{3}-1}6x=2x\left(3x^2\right)^{-\frac{2}{3}}=$$
$$=\frac{2x}{\left(3x^2\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(3x^2\right)^2}}=\frac{2x}{\sqrt[3]{9x^4}}=\frac{2x}{x\sqrt[3]{9x}}=\frac{2}{\sqrt[3]{9x}}$$

11) $f(x)=\sqrt{x+3}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

12) $f(x)=\sqrt[6]{2x^5-3x^2}$

$$f(x)=\sqrt[6]{2x^5-3x^2}=\left(2x^5-3x^2\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{6}\left(2x^5-3x^2\right)^{\frac{1}{6}-1}\left(10x^4-6x\right)=\frac{1}{6}\left(2x^5-3x^2\right)^{-\frac{5}{6}}\left(10x^4-6x\right)=$$
$$=\frac{\left(10x^4-6x\right)}{6\left(2x^5-3x^2\right)^{\frac{5}{6}}}=\frac{2\left(5x^4-3x\right)}{6\sqrt[6]{\left(2x^5-3x^2\right)^5}}=\frac{5x^4-3x}{3\sqrt[6]{\left(2x^5-3x^2\right)^5}}$$

13) $f(x)=3^{x+1}$

$$f(x)=3^{g(x)} \Rightarrow f(x)=3^{g(x)}\cdot\ln 3\cdot g'(x)$$

Así:

$$f'(x)=3^{x+1}\cdot\ln 3\cdot 1=3^{x+1}\cdot\ln 3$$

También se puede derivar tomando logaritmos:

$$\ln\left(f(x)\right)=\ln\left(3^{x+1}\right)\Rightarrow \ln\left(f(x)\right)=(x+1)\ln 3$$

Y, derivando ambos miembros, queda:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln 3\Rightarrow f'(x)=\ln 3 f(x)=3^{x+1}\ln 3$$

14) $f(x)=e^{x^8}$

$$f(x)=e^{g(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}g'(x)$$

$$f'(x)=e^{x^8}8x^7=8x^7e^{x^8}$$

15) $f(x)=x^8\cdot 3^x$

$$f'(x)=8x^7\cdot 3^x+x^8\cdot 3^x\ln 3=x^7\cdot 3^x\left(8+x\ln 3\right)$$

16) $f(x)=10^{5x^2}$

$$f'(x)=10^{5x^2}\cdot\ln 10\cdot 10x=10x\cdot 10^{5x^2}\cdot\ln 10$$

También se podría haber resuelto aplicando logaritmos previamente:

$$\ln f(x)=\ln 10^{5x^2}=5x^2\ln 10\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=10x\ln 10\Rightarrow f'(x)=10x\ln 10 f(x)=$$
$$=10x\ln 10 10^{5x^2}=10x\cdot 10^{5x^2}\ln 10$$

17) $f(x)=\log_3(5x-2)$

$$f(x)=\log_3\left(g(x)\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{g(x)}\log_3 e\cdot g'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_3 e$$

Así:

$$f'(x)=\frac{5}{5x-2}\log_3 e$$

18) $f(x) = \ln\left(3x^2 - 2x + 4\right)$

$$f(x) = \ln\left(g(x)\right) \Rightarrow f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Así:

$$f'(x) = \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 4}$$

19) $f(x) = \cos(5x)$

$$f(x) = \cos\left(g(x)\right) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}\left(g(x)\right) g'(x)$$

Así:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(5x)5 = -5\operatorname{sen}(5x)$$

20) $f(x) = e^{2x} \cdot \log x$

$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot \log x + e^{2x}\frac{1}{x} \cdot \log e = e^{2x}\left(2\log x + \frac{\log e}{x}\right)$$

21) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

$$f'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

22) Dada la función $f(x) = x^2 - 8x + 1$, calcula de dos formas distintas la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 1$.

La pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 1$ es $f'(1)$, por lo que las dos formas de resolver el ejercicio son los dos métodos que tenemos para calcular esta derivada:

a) Como límite de la $TVM_{[1,1+h]}$ cuando h tiende a cero:

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 8(1+h) + 1 = 1 + 2h + h^2 - 8 - 8h + 1 = h^2 - 6h - 6$$
$$f(1) = 1^2 - 8 \cdot 1 + 1 = 1 - 8 + 1 = -6$$

Con lo que

$TVM_{[1,1+h]}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h^2-6h-6-(-6)}{h}=\dfrac{h^2-6h-6+6}{h}=\dfrac{h^2-6h}{h}$, de donde $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-6h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h-6)=-6$.

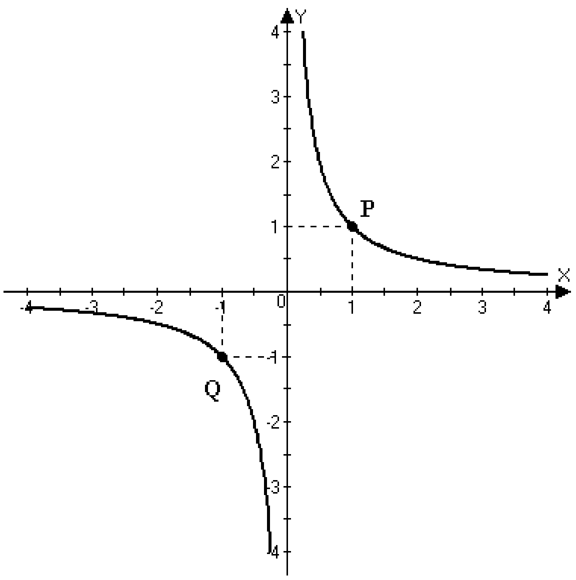
Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la curva en $x=1$ es $m=-6$.

b) Calculando la función derivada y después sustituyendo en $x=1$:

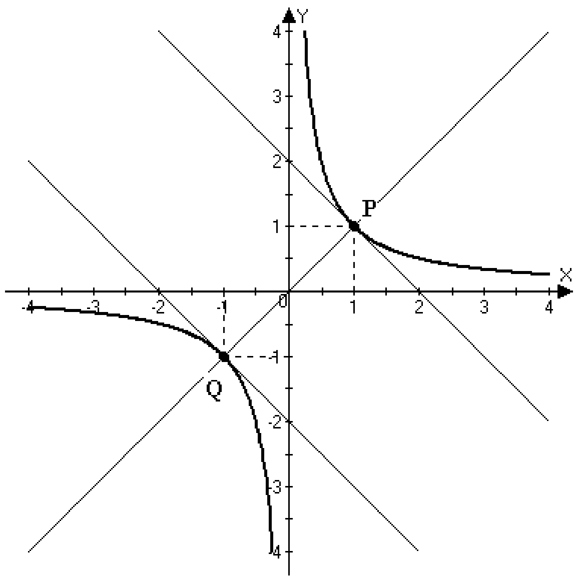
$f(x)=x^2-8x+1$, luego $f'(x)=2x-8$ y, por tanto,

$f'(1)=2\cdot 1-8=2-8=-6$

23) Calcula la ecuación de las rectas tangentes y normales a la función $f(x)$ de la gráfica siguiente en los puntos de abscisas 1 y -1.



Dibujamos las rectas tangentes a $f(x)$ en los puntos $P(1,1)$ y $Q(-1,-1)$.



Observamos que ambas rectas son paralelas, luego tienen la misma pendiente.

Sabemos que la pendiente coincide con la derivada en el punto, luego $f'(1) = f'(-1)$.

Pero por otro lado, la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma dicha recta con el semieje positivo de abscisas, y como conocemos los puntos $A(2,0)$ y $B(0,2)$, resulta que la pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$

Por lo que la ecuación de la recta tangente en el punto $P(1,1)$ es:

$$y - 1 = (-1)(x-1) = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 2$$

La recta normal en P pasa por P y es perpendicular a la anterior. La condición de perpendicularidad nos dice que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es -1 , con lo que, si llamamos m_2 a la pendiente buscada, tenemos:

$$(-1)m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = 1$$

Y la recta normal es $y - 1 = 1 \cdot (x-1) = x - 1 \Rightarrow y = x$

Como ya tenemos la pendiente (-1), el razonamiento es similar en el punto Q. Se obtiene como resultado que:

- ✓ la recta tangente es $y = -x - 2$
- ✓ la recta normal es $y = x$

Nótese en la gráfica que la recta normal es la misma, pues la recta $y = x$ corta perpendicularmente a la gráfica en ambos puntos.

24) La velocidad en función del tiempo de un coche, en metros por segundo, viene determinada por la expresión analítica $v(t) = \frac{70t}{t+3}$. Compara en una tabla, la velocidad y la aceleración del coche a los 0, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 segundos. ¿Qué observas?

Para calcular las velocidades pedidas no tenemos más que sustituir en la expresión analítica de la función y calcular la imagen pedida.

Para la aceleración, sabemos que es la derivada de la velocidad, con lo que bastará hallar la función derivada y sustituir:

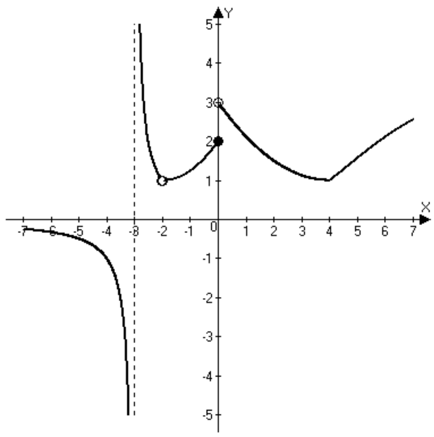
$$a(t) = v'(t) = \frac{70(t+3) - 70t \cdot 1}{(t+3)^2} = \frac{70t + 210 - 70t}{(t+3)^2} = \frac{210}{(t+3)^2}$$

Construimos la tabla sustituyendo t por los valores anteriores en las dos funciones:

t	0	10	20	30	40	so	60
v(t)	0	53’8	60’8	63’6	65’1	66	66’6
a(t)	23’3	1’2	0’39	0’19	0’11	0’07	0’05

Observamos que cuando la velocidad se estabiliza, la aceleración tiende a cero. El conductor no siente la velocidad, sino el cambio de velocidad, es decir, la aceleración.

25) Dada la gráfica de la figura, indica donde no es derivable y por qué:



Sabemos que hay dos tipos de puntos en los que una función no es derivable:

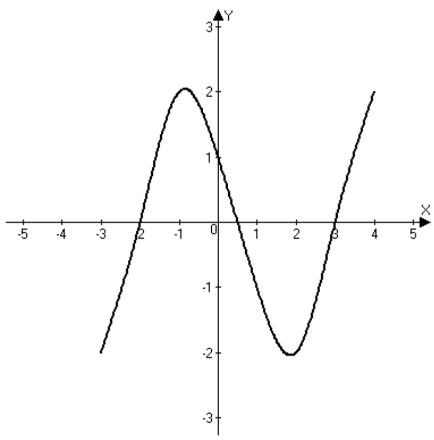
- ❖ En los que no es continua, porque la derivada no existe.

- En los que siendo continua, son puntos angulosos, porque las derivadas laterales van a ser distintas.

Por lo tanto, como esta función no es continua en $x=-3,\ x=1$ y $x=0$, tampoco va a ser derivable en estos puntos.

En $x=4$, aunque sea continua, se presenta un "ángulo", por lo que las derivadas izquierda y derecha van a ser distintas y por tanto no existe la derivada.

26) Dada una función $f(x)$ cuya gráfica es la siguiente, indica dónde es $f'(x)$ positiva, negativa y nula:



Sabemos que la derivada en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto. Por tanto, si la recta es creciente, la derivada será positiva; si la recta es decreciente, la derivada será negativa, y si la recta es horizontal, la derivada será nula. Trazando las rectas tangentes, podemos observar que:

- Son crecientes para $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$
- Son decrecientes para $x\in(-1,2)$
- Son constantes en $x=1$ y $x=2$.

Por lo que $f'(x)$ es positiva en $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$
$f'(x)$ es negativa en $(-1,2)$
$f'(x)$ es nula en $x=1$ y $x=2$.