PROBABILIDAD

ÍNDICE: **Pág.**

PROBABILIDAD

1. INTRODUCCIÓN.

Estamos acostumbrados a participar en juegos de azar y muchas veces jugamos con criterios que no tienen un fundamento racional. Por ejemplo, en el sorteo de lotería de Navidad, el organismo nacional de Loterías obsequia al jefe del Estado con el número 0000, que no querría nadie. Sin embargo, nadie sentiría un rechazo especial al número 23.458, aunque ambos tengan la misma opción de salir premiados: una de cada 100.000
Lo mismo podríamos decir de las terminaciones: escuchamos decir: "déme uno que termine en 2", como si esta terminación fuese más probable, por ejemplo, de la de los números que terminan en 0.

En este tema vamos a trabajar sobre muchas situaciones en las que interviene el azar y vamos a estudiar cómo saber cuáles son las posibilidades de realización de una determinada opción. Esto es generalizable para cualquier situación que consideremos "azarosa", esto es, cuyo resultado no se pueda saber de antemano.

2. CONCEPTOS DE PROBABILIDAD.

En la vida cotidiana, existen experimentos en los que el resultado no se puede predecir con antelación. Así, si lanzamos una moneda al aire que no esté trucada, no sabremos hasta que caiga si sale cara o si sale cruz. O cuando una persona realiza un viaje, no podemos saber antes de su salida a qué hora llegará-
A este tipo de fenómenos o experimentos se les denomina experimentos aleatorios.

En cambio, si dejamos caer una piedra desde lo alto de un edificio, podemos predecir antes de lanzarla el tiempo que empleará en llegar al suelo. O, si colgamos un cuerpo de un dinamómetro, sabemos de antemano cuanto se alargará si conocemos su peso. Este tipo de fenómenos o experimentos reciben el nombre de experimentos deterministas.

Podemos, por tanto, decir que un experimento aleatorio es cualquier fenómeno cuyo resultado no se pueda predecir aunque se repita en las mismas condiciones cualquier número de veces. (Después de lanzar 30 veces una moneda, no sabemos qué resultado obtendremos en la tirada trigésimo primera)

Un experimento determinista será aquel en el que podamos determinar el resultado antes de su realización.

En este tema vamos a estudiar fenómenos aleatorios, tratando de concretar las posibilidades de realización de las distintas opciones que puedan darse. Cuestiones por ejemplo como qué estrategia es mejor seguir en un juego de azar, o de incertidumbre en la vida cotidiana o profesional.

Dado un experimento aleatorio, llamamos espacio muestral, E, al conjunto de todos los resultados que podemos obtener. Así, en el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda al aire y comprobar el resultado, hay dos opciones: salir cara o salir cruz. Por tanto, el espacio muestral será E={c,x}.
En el experimento “resultado del lanzamiento de un dado”, el espacio muestral es E={1,2,3,4,5,6}.

Llamamos suceso elemental a cualquier resultado de un experimento aleatorio. De esta manera, en el lanzamiento de una moneda hay dos sucesos elementales: C = Sacar cara, y X = Sacar cruz.

En el lanzamiento de un dado, los sucesos elementales serán: “salir uno”, “salir dos”, “salir tres”, “salir cuatro”, “salir cinco” y “salir seis”.

En general, un suceso será cualquier subconjunto del espacio muestral- Así, en el lanzamiento de un dado, el espacio muestral es E = {1,2,3,4,5,6} y son sucesos cualquier subconjunto de E:

Salir número par = {2,4,6}, Salir un número menor que 3 = {1,2},
Salir un uno = {1},... (los sucesos elementales son los sucesos más simples)

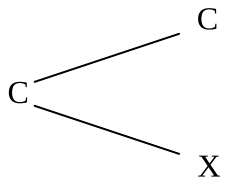
A los sucesos se les representa con una letra mayúscula, y podemos nombrarlos de dos maneras:

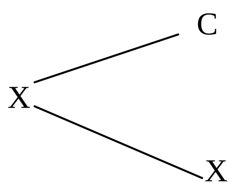
- Por extensión: indicando todos los elementos que forman parte del subconjunto. Por ejemplo, el suceso A={1,3,5}
- Por comprensión: Indicando una propiedad que cumplan unívocamente los elementos del suceso. Así, el suceso anterior, también se puede definir como A = Resultados impares del lanzamiento de un dado.

Por ejemplo, el suceso B = {3,6} (extensión)
B = Múltiplos de tres (comprensión)

Cuando un experimento aleatorio está formado por dos o más experimentos aleatorios individuales se denomina experimento aleatorio compuesto. Por ejemplo, el experimento lanzar una moneda dos veces y comprobar el resultado, es un experimento aleatorio compuesto.

En este caso, para calcular el espacio muestral, es útil la utilización de los llamados diagramas de árbol, pues nos facilitan la tarea de encontrar todos los posibles resultados (sucesos elementales). En el caso anterior seria:





Por tanto, el espacio muestral seria E = {CC, CX, XC, XX}

<u>Ejercicio 1:</u>

Construye el espacio muestral asociado al experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda.

Diremos que un suceso ha ocurrido o se ha realizado cuando en una prueba del experimento el resultado ha sido uno de los elementos que componen el suceso. Por ejemplo, si tenemos el suceso A = Salir número par, y al lanzar el dado obtenemos un 4, decimos que el suceso A se ha realizado, ya que ha salido uno de los elementos del conjunto A.

Podemos establecer distintos tipos de sucesos:

- Suceso elemental: ya sabemos que es el formado por un resultado del experimento aleatorio.
- Suceso compuesto: el formado por más de un suceso elemental. Por ejemplo, “salir número par”.
- Suceso seguro: Aquel que siempre se realiza. Por tanto, deberá estar formado por todos los elementos del experimento aleatorio. Así, en el lanzamiento de un dado, son sucesos seguros E = {1,2,3,4,5,6}, B = “Salir un número menor que 12”, C = “No salir 1.5 al lanzar un dado”,...
- Suceso imposible: Aquel que nunca ocurre. Se representa por el símbolo $\varnothing$. Son sucesos imposibles en el lanzamiento de un dado: “Salir un 7”, “Salir un número menor que 0”, “Salir 0 puntos”...
- Suceso contrario. Es el que se realiza cuando no se realiza uno dado. Así, en el lanzamiento de una moneda, el suceso contrario de “Salir cara” es “Salir cruz”, ya que si no sale cara, sale cruz; en el lanzamiento de un dado, el contrario de “obtener un múltiplo de tres” es “obtener uno, dos, cuatro o cinco”. Dado un suceso A, a su contrario se le representa por $\overline{A}$.
  Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el suceso contrario de $A=\{1,4,5\}$ es $\overline{A}=\{2,3,6\}$.
- Sucesos incompatibles: Son aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente. En consecuencia, no tienen elementos en común. Así, en el lanzamiento de un dado, son incompatibles A = “Salir múltiplo de tres” y B = {1, 2}; si lanzamos un dado y una

moneda, son incompatibles C = “Salir cara y cualquier número” y D = “Salir cruz y un número par”.

- Implicación o inclusión de sucesos: Decimos que el suceso A implica el suceso B, o que A está contenido en B, notado $A \subset B$, si siempre que se realiza A también se realiza B. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, A = “Obtener un seis” está incluido en B = “Obtener un número par”, pues siempre que obtenemos un seis, sale un número par. En cambio, el recíproco no es cierto: no siempre que obtengamos un número par tiene por qué ser un seis.
  Nótese que cuando un suceso está incluido en otro, todos sus elementos están también en el segundo conjunto.
  Por ejemplo en el experimento consistente en lanzar dos veces un dado y sumar las puntuaciones, el suceso “la suma es menor que cuatro”, A = {(1, 1), (1,2), (1,3), (2,1)}, está contenido en el suceso B = “Uno de los dos resultados es un uno” = {(l,l), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1),(5,1), (6,1)} .
- Espacio de sucesos: es el conjunto de todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio. Se representa por el símbolo Ω.
  El espacio de sucesos asociado al lanzamiento de una moneda es: $\Omega = \{\varnothing, \{C\}, \{X\}, E = \{C, X\}\}$

Si el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio consta de n sucesos elementales, entonces el espacio de sucesos tiene 2^n sucesos.

Así, en el lanzamiento de una moneda, E = {C, X} (dos sucesos elementales) y Ω consta de $2^2 = 4$ sucesos compuestos.

Ejercicio 2:

Dado el experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres monedas distintas, calcula de manera razonada:

a) El espacio muestral.
b) El suceso A = “Obtener dos caras”.
c) El suceso B = “Obtener al menos dos caras”.
d) ¿Son A y B incompatibles? ¿Y contrarios? ¿Está alguno contenido en el otro?
e) Indica dos sucesos incompatibles.
f) ¿Cuál es el suceso contrario de C = “Obtener al menos una cruz”?
g) Indica un suceso imposible y un suceso seguro.
h) ¿De cuántos elementos consta el espacio de sucesos asociado?
i) Indica por comprensión y por extensión un suceso compuesto no utilizado hasta ahora.

3. OPERACIONES CON SUCESOS.

Las operaciones que vamos a realizar con sucesos son más fáciles de entender si las representamos gráficamente. Para ello, representaremos el espacio muestral, E, mediante un rectángulo, y los restantes sucesos con círculos, estando sus elementos incluidos en los mismos. Esta representación se denomina mediante diagramas de Venn.

Por ejemplo, en el experimento "Sumar los puntos de dos lanzamientos de un dado", los sucesos A = "Obtener una suma impar" = {3, 5, 7, 9, 11} y su contrario $\overline{A}$ = "Obtener suma par" = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, los representamos gráficamente como aparece a continuación.

3.1. UNIÓN DE SUCESOS.

Dados dos sucesos A y B, el suceso unión, $A \cup B$ es el suceso que se realiza cuando se verifica A o se verifica B. Es decir, se cumple uno cualquiera de los dos sucesos o ambos simultáneamente. Por consiguiente, estará formado por todos los elementos de los dos sucesos. Así, en el experimento consistente en lanzar dos veces un dado y sumar las puntuaciones, si el suceso A es "sumar número impar" y el suceso B "sumar múltiplo de cinco", entonces $A \cup B$ = {3, 5, 7, 9, 10, 11}

3.2. INTERSECCIÓN DE SUCESOS.

Dados dos sucesos A y B, su intersección es el suceso que se verifica cuando se realizan simultáneamente A y B. Se representa por $A \cap B$. Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, si A es "sacar número impar" y B "obtener múltiplo de tres", entonces A = {1, 3, 5}, B = {3, 6}, $A \cap B$ = {3}.

Nótese que el suceso intersección está formado por los elementos comunes a ambos conjuntos.

Si dos sucesos son incompatibles, entonces su intersección es $\varnothing$.

Así, en el experimento de lanzar dos dados distintos y sumar las puntuaciones, los sucesos A = "Obtener suma múltiplo de 3" = {3, 6, 9, 12}, y B = "Obtener suma menor de tres" = {2} son sucesos incompatibles y su intersección es $\varnothing$.

3.3. DIFERENCIA DE SUCESOS.

Dados dos sucesos A y B, llamamos diferencia de A y B, notado A-B, al suceso que se realiza cuando se realiza A y no se realiza B. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si A es "Obtener un número par" y B "Obtener un múltiplo de tres", A = {2,4,6}, B = {3,6}, entonces A-B = {2,4}.

3.4. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS.

Se verifican las siguientes propiedades. Puedes comprobarlas utilizando diagramas de Venn:

	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$

Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Elementos neutros	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
Absorción	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$

Asimismo, se cumplen las llamadas leyes de Morgan, que pueden sernos de utilidad en el cálculo de probabilidades, como veremos más adelante.

1ª ley de Morgan: El suceso contrario de la unión de dos sucesos es igual a la intersección de sus contrarios.

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

2ª ley de Morgan: El suceso contrario a la intersección de dos sucesos es igual a la unión de sus contrarios.

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

<u>Ejercicio 3:</u>

Demuestra, utilizando diagramas de Venn, la segunda ley de Morgan.

<u>Ejercicio 4:</u>

Se lanzan dos dados distintos y se considera la suma de las caras obtenidas. Dados los sucesos A =”Salir suma par”, y B = “Salir como mínimo un dos”, escribe los sucesos

a) A y B.
b) $\overline{A\cup B}$
c) $A\cap B$
d) $A-B$
e) $\overline{B}$
f) $A\cap\overline{B}$

4. PROBABILIDAD DE UN SUCESO.

Ante un experimento aleatorio, en el que no sabemos cuál es el resultado, la pregunta que surge es qué suceso es más probable que ocurra. Es usual planteamos estas cuestiones en los juegos de azar, buscando la estrategia que nos dé más posibilidad de ganar. Surge así la idea de probabilidad de un suceso, que nos da idea de la mayor o menor posibilidad de ocurrencia que dicho suceso presenta. Por ejemplo, si una moneda no está trucada, diremos que es igualmente probable obtener cara que salir cruz.

En esta pregunta vamos a estudiar esto con más profundidad, llegando a la definición de probabilidad para después poder calcularla para sucesos de cualquier experimento aleatorio.

4.1. FRECUENCIAS ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN SUCESO.

Consideramos el experimento aleatorio lanzamiento de un dado. El espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Supongamos que hemos realizado el experimento cien veces, esto es, hemos tirado cien veces el dado, y hemos obtenido los siguientes resultados:
El uno lo hemos obtenido 15 veces; el dos, 18 veces; el tres, 23 veces; el cuatro, 12 veces; el cinco, 22 veces; y el seis, 10 veces.

Denominamos frecuencia absoluta de un suceso al número de veces que se ha verificado dicho suceso cuando hemos repetido el experimento aleatorio un número determinado de veces.

Por consiguiente, para el ejemplo anterior, podemos decir que F({1}) = 15; F({2}) = 18; F({3}) = 23; F({4}) = 12; F({5}) = 22; F({6}) = 10.

Llamamos frecuencia relativa de un suceso al cociente entre el número de veces que se ha verificado y el número total de veces que se ha repetido.

Como en nuestro ejemplo se ha realizado el experimento 100 veces, para calcular la frecuencia relativa de cada suceso dividiremos su frecuencia absoluta entre l 00.

De manera que $fr(1)=\frac{15}{100}=0.15$; $fr(2)=\frac{18}{100}=0.18$; $fr(3)=\frac{23}{100}=0.23$; $fr(4)=\frac{12}{100}=0.12$; $fr(5)=\frac{22}{100}=0.22$; $fr(6)=\frac{10}{100}=0.1$

<u>Ejercicio 5:</u>

En el anterior ejemplo, calcula las frecuencias absoluta y relativa de los sucesos A = “Obtener número impar” y B = “Salir múltiplo de 3”.

4.2. LEY EMPIRICA DE LA PROBABILIDAD. LEY DE LOS GRANDES NUMEROS.

Supongamos que consideramos el lanzamiento de una moneda. Si ésta no está trucada, cabe pensar que aproximadamente la mitad de las veces que realicemos el experimento obtendremos cara, y el resto de las tiradas saldrá cruz. La idea es que cuantas más veces se realice el experimento, más cercano a la mitad de los lanzamientos será el número de veces que nos aparezca cara, esto es, cuantas más veces lancemos la moneda, más próxima estará a 0.5 la frecuencia relativa de “salir cara”.

Escribamos los resultados en la siguiente tabla:

Número de lanzamientos	10	20	50	100	500
Número de caras	4	9	27	51	248
fr(salir cara)	0.4	0.45	0.54	0.51	0.496

La experiencia nos demuestra que cuando se realiza un experimento aleatorio de forma reiterada, el valor de la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número a medida que aumenta el número de veces que se realiza el experimento. Esto es lo que se conoce como ley empírica del azar o ley de los grandes números:

"La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse a medida que aumenta el número de veces que se realiza el experimento."

El adjetivo empírico significa que esta ley se demuestra experimentalmente, es decir, comprobándola mediante pruebas sucesivas. Esto no significa que esta ley sea una trivialidad. Al contrario, el primero en enunciarla fue Jakob Bernouilli (1654-1705), que dedicó casi la mitad de su vida a estudios de probabilidad que le llevaron a enunciar la famosa ley de los grandes números.

Esta ley de los grandes números nos permite definir lo que entendemos por probabilidad: si al aumentar el número de lanzamientos de una moneda resulta que la frecuencia relativa de "salir cara" estará más cerca de 0.5 cuantos más lanzamientos haya, diremos que 0.5 será la probabilidad de "salir cara", siendo, por tanto, el limite de las frecuencias relativas cuando el número de lanzamientos aumenta indefinidamente. De manera que podemos definir la probabilidad de un suceso como el límite en el infinito de su frecuencia relativa:

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \lim_{n\to\infty} fr(A)$$

donde m = Frecuencia absoluta del suceso A y n = Total de repeticiones.

Esta definición de probabilidad es una probabilidad a posteriori, puesto que para calcularla habría que realizar antes el experimento "una infinidad de veces", no seria operativo. Por ello, vamos a dar ahora una nueva definición de probabilidad que nos permitirá resolver cálculo de probabilidades para cualquier experimento.

4.3. DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD. LEY DE LAPLACE.

Superando el problema planteado en la pregunta anterior, tenemos la definición de probabilidad dada por Pierre-Simon Laplace. Para poder utilizarla, es requisito imprescindible que los sucesos elementales sean equiprobables, esto es, que tengan la misma probabilidad. Esto no supone restricción en la mayoría de los casos, ya que es lo que suele ocurrir mayormente: cuando lanzamos una moneda, cara y cruz son equiprobables; si un dado no está trucado, todas las caras tienen la misma posibilidad de salir, etc.

La definición dada por Laplace afirma que:

"La probabilidad de un suceso cualquiera A es igual al cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles"

$$p(A) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ \ favorables\ al\ suceso\ A}{n^{o}\ de\ casos\ \ posibles}$$

Ejemplo 1:

Probabilidad de obtener múltiplo de tres al lanzar un dado.

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = Salir múltiplo de tres = {3, 6}

Los sucesos elementales son equiprobables.

Hay 2 casos favorables al suceso A y 6 casos posibles.

Por tanto, $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$

Ejemplo 2:

En una urna hay 3 bolas blancas, cinco rojas y dos negras. ¿Cuál es la probabilidad de, sacando una bola al azar, sea negra?

Hay 10 bolas en la urna, luego existen 10 posibles resultados. De todos ellos, sólo dos son favorables (las dos bolas negras). Por tanto, si llamamos B = "Sacar bola negra"

$$p(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$

A las probabilidades calculadas con la regla de Laplace también se les llama probabilidades a priori, pues el suponer que los sucesos elementales son equiprobables es ya una información probabilística antes de realizar cualquier experimento. No obstante, hemos dicho que es algo lógico y no induce a error.

Ejercicio 6:

En el experimento aleatorio consistente en lanzar tres monedas, ¿cuál es la probabilidad del suceso A = "Obtener al menos dos caras"? ¿Y de B = "Obtener dos cruces"?

4.4. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD.

Para superar los problemas antes planteados, vamos a definir axiomáticamente qué propiedades debe cumplir una función para considerarse que es una probabilidad. Es una definición más abstracta, pero de ella se derivan una serie de propiedades que van a servirnos para el cálculo práctico de probabilidades.

Si llamamos P(E) al conjunto de todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio, una probabilidad es una aplicación p:

$$\begin{array}{llll} p: & P(E) & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & p(A) \end{array}$$

de modo que asociado a cada suceso A una probabilidad p(A), se verifica:

1) p(E) = 1
2) $0 \leq p(A) \leq 1 \quad \forall A \in P(E)$
3) Si A y B son incompatibles $(A \cap B = \emptyset)$ entonces $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Esta definición de probabilidad no está más que afirmando desde el punto de vista teórico lo que la práctica y la definición de Laplace nos vienen diciendo.
Teniendo en cuenta que la probabilidad es el cociente entre casos favorables y casos posibles:

1) El suceso seguro tiene tantos casos favorables como posibles, luego su probabilidad es 1.

2) Cualquier suceso tendrá como mínimo ningún caso a su favor, y como máximo, todos los sucesos posibles le serán favorables (será el suceso seguro), con lo que al dividir entre el número de casos posibles, el cociente oscilará entre 0 y 1. Nótese que esto nos está diciendo también que cuanto más cerca de cero esté la probabilidad de un suceso más difícil será su ocurrencia, mientras que cuanto más próxima esté de 1 más posibilidad tendrá de ocurrir.
La probabilidad mide, por tanto, el tanto por uno de ocurrencia de un suceso.

3) La tercera propiedad lo que nos está diciendo es que si dos sucesos no tienen elementos en común, entonces al unir los dos sucesos obtenemos tantos casos favorables como la suma de los elementos de cada uno, y en consecuencia, podremos sumar las probabilidades respectivas (no se repiten elementos, luego en la probabilidad de uno no se incluyen elementos del otro suceso, de modo que al unir los sucesos hay tantos elementos como la suma de los elementos de cada uno).

Por ejemplo, si en el experimento lanzamiento de un dado consideramos los sucesos A = "Obtener múltiplo de tres" y B = "Salir a lo sumo un dos", tenemos:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A = {3, 6}
B = {1, 2}

$$P(A)=\frac{2}{6} \text{ y } P(B)=\frac{2}{6}$$

$$A\cup B = \{1, 2, 3, 6\}$$

Como A y B son incompatibles, al unir ambos sucesos obtenemos 2+2=4 elementos o casos favorables, pues no aparecen elementos repetidos, de manera que su probabilidad será $P(A\cup B)=\frac{4}{6}$.

Luego $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Nótese que esto no ocurrirá cuando los sucesos no sean incompatibles, pues entonces habrá elementos repetidos y no quedarán tantos casos favorables en el suceso unión.

Observación:

La definición de probabilidad permite también una traducción en términos de porcentaje. Multiplicando por 100 la probabilidad de un suceso tenemos el porcentaje de ocurrencia de dicho suceso. Esto significa que si realizamos el experimento un número considerable de veces, entonces en el porcentaje indicado por la probabilidad saldría dicho suceso. Es decir, si la probabilidad de un suceso A es 0.25 significa que si realizamos el experimento un número grande de veces, en el 25% de ellas ocurrirá el suceso A, y en el 75% no.

De la definición axiomática de probabilidad se deducen las siguientes propiedades, que van a sernos de mucha utilidad en el cálculo práctico:

1) $P(A)+P(\overline{A})=1$ o $P(\overline{A})=1-P(A)$

   Como A y $\overline{A}$ son incompatibles y además su unión es el espacio muestral E, al unirlos la probabilidad será uno.

2) $P(\varnothing)=0$

   El suceso imposible no tiene casos a favor, luego su probabilidad es cero.

3) Si A_1, A_2, A_3, ..., A_n son sucesos incompatibles dos a dos (dos cualesquiera de ellos no tienen elementos comunes, $A_i\cap A_j=\varnothing\ \forall i\neq j$), entonces:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots+P(A_n)$$

   Lo que se cumplía para dos sucesos incompatibles se verifica también para un número cualquiera de sucesos disjuntos dos a dos.

4) PROBABILIDAD DE LA UNIÓN PARA DOS SUCESOS CUALESQUIERA

Dados dos sucesos A y B, se verifica que $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$

La idea es sencilla: si A y B no son incompatibles, tienen elementos comunes, luego aparecen estos elementos repetidos. A la hora de hallar la probabilidad, habrá que restar la probabilidad “repetida”, que corresponde a los elementos comunes a los dos conjuntos, esto es, a $A\cap B$.

Gráficamente es fácil de comprobar.

5) La probabilidad anterior se generaliza para tres sucesos de la siguiente manera:

$$P\left(A\cup B\cup C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P(C)-P\left(A\cap B\right)-P\left(A\cap C\right)-P\left(B\cap C\right)+P\left(A\cap B\cap C\right)$$

Ejemplo 3:

En una clase de 1º de bachillerato de 28 alumnos, 12 juegan al fútbol, 9 al baloncesto y 3 a ambos deportes. ¿Cuál es la probabilidad de que escogido al azar un estudiante de la clase juegue a algún deporte?

Consideramos los sucesos F = Jugar al fútbol y B = Jugar al baloncesto.
Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(F)=\frac{12}{28}=0.42 \qquad P(B)=\frac{9}{28}=0.32 \qquad P(F\cap B)=\frac{3}{28}=0.107$$

Como el suceso del que nos hablan es “practicar algún deporte”, esto se cumplirá cuando se juegue al fútbol o al baloncesto o a ambos simultáneamente; luego nos están pidiendo la probabilidad de la unión de los dos sucesos F y B.

Por tanto, P(Practicar algún deporte) = $P(F\cup B)=P(F)+P(B)-P(F\cap B)=$
$=0.42+0.32-0.107=0.61$

Luego el 61% de los alumnos practica algún deporte.

Nótese que para hallar la probabilidad hay que restar la probabilidad de la intersección porque si considerásemos sólo la suma, 0.42+0.32, en ese 0.72 están repetidos los alumnos que practican ambos deportes; por eso hay que restar la probabilidad de la intersección.

6) PROBABILIDAD DEL SUCESO CONTRARIO:

Dado un suceso A entonces la probabilidad de su contrario es $P(\overline{A})=1-P(A)$

En efecto, como A y $\overline{A}$ son disjuntos y además su unión es el suceso seguro, tenemos que:
$E=A\cup\overline{A}\Rightarrow P(E)=P(A)+P(\overline{A})$, es decir, $1=P(A)+P(\overline{A})$, de donde $P(\overline{A})=1-P(A)$.

<u>Ejemplo 4:</u>

En el lanzamiento de un dado trucado, la probabilidad de obtener un número par es 2/5. ¿Qué probabilidad tiene su contrario?

El contrario en este caso es B = "Obtener número impar".
Según lo anterior, $P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

El empleo del suceso contrario a veces nos va a ser muy útil para calcular probabilidades, pues habrá casos en los que sea más fácil hallar su probabilidad que la del suceso pedido.

5. PROBABILIDAD CONDICIONADA.

Supongamos que estamos considerando el experimento aleatorio "lanzamiento de un dado dos veces". Sabemos que el espacio muestral asociado es E = {(1,l), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5, l). (5,2), (5,3). (5,4), (5,5), (5,6), (6, l), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

Es decir, hay 36 casos posibles.

Consideremos ahora dos sucesos: A = "La suma de los dos lanzamientos es nueve" y B = "Salir al menos un cuatro"

A = {(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}
B = {(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,1), (5,4), (6,1)}

Si nos dicen que calculemos la probabilidad de A, la respuesta es sencilla: hay 36 casos posibles y 4 favorables, luego $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=0.11$

Pero si ahora nos preguntan: "Sabiendo que hemos obtenido al menos un cuatro, ¿ cuál es la probabilidad de que la suma de los lanzamientos sea nueve?

Nos están preguntando por la probabilidad dc A, sí, pero nos están dando una información adicional: hemos obtenido al menos un cuatro (o sea, ha ocurrido el suceso B). Por tanto, estamos limitando los casos posibles, pues ahora, por ejemplo, nos están diciendo que (3,2) no ha ocurrido.

En este caso, pues, nos están dando una información: "ha ocurrido B" y con esta información hemos de calcular la probabilidad de A. Esta probabilidades ve afectada por el primer suceso. De manera que ahora sólo hay 11 casos posibles y 2 favorables.

Por tanto, la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B es $\frac{2}{11}=0.18$.

Es lo que llamamos probabilidad condicionada. Y escribiremos que $P\left(A/B\right)=0.18$

Podemos, pues, definir la probabilidad del suceso A condicionada a B como la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

¿Cómo calcularemos esta probabilidad?

Si nos fijamos en el ejemplo anterior, los casos favorables a A sabiendo que ha ocurrido B no son ya los cuatro primitivos, porque si ha ocurrido B dos casos no son ya válidos: (3,6) y (6,3) ya no son casos a favor, pues ha salido al menos un cuatro.

Es decir, nos quedamos como casos favorables los casos comunes a A y B, esto es, con $A \cap B$.
Y como casos posibles, sabiendo que ha ocurrido B, sólo lo serán los elementos de este suceso.

Por ejemplo, (1,2) ya no es un caso posible, pues nos dicen que ha salido un cuatro. Por tanto, sólo serán casos posibles los elementos de B.

De donde resulta que $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Que es la definición de probabilidad de un suceso condicionado a que otro ya ha ocurrido.

Evidentemente, los sucesos son intercambiables. También podemos decir que

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

Las probabilidades condicionadas además nos van a ser muy útiles para calcular la probabilidad de la intersección:

En efecto, despejando de las fórmulas anteriores, obtenemos:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \text{ o } P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

6. SUCESOS INDEPENDIENTES.

En la pregunta anterior hemos estudiado cómo la realización de un suceso puede influir en la realización de otro. Lo que ahora nos vamos a plantear es si esto es siempre así o puede depender de los sucesos que consideremos.

Para ello, consideremos el siguiente ejemplo: Supongamos que tenemos el experimento aleatorio consistente en sacar sucesivamente dos cartas de una baraja española devolviendo la primera carta a la baraja antes de realizar la segunda extracción.

Consideramos los sucesos: A = “La primera carta es de oros”.

B = “La segunda carta es de bastos”.

La pregunta que nos hacemos es si el hecho de que haya ocurrido A influye o no en la ocurrencia de B. Es decir, lo que nos estamos planteando es si la probabilidad de B varía influida por la información que tenemos de que A ya se ha realizado.

Si no tenemos información sobre la ocurrencia o no de A, entonces para calcular la probabilidad de B tenemos diez casos favorables y cuarenta posibles, pues puede salir cualquiera de las cartas de la baraja.

De manera que $P(B)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0.25$

Si nos dicen que A ha ocurrido, ¿influirá en la probabilidad que tiene B de ocurrir?
Aunque A se haya realizado, el ejercicio nos dice que la primera carta se devuelve a la baraja. Entonces lo que sabemos es que la primera carta que se extrajo fue un oro, pero ha sido devuelto a la baraja. De manera que sigue habiendo diez casos favorables y cuarenta posibles.
Así que $P(B/A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0.25$

Por tanto, el hecho de que A haya ocurrido no ha modificado la probabilidad de B. Vamos a decir entonces que B es independiente de A, o que A no influye en B.

Definimos, por tanto: B es independiente de A si $P(B/A)=P(B)$

Evidentemente, esto no va a ser siempre así. Dependiendo de los experimentos que realicemos o de los sucesos que escojamos, dos sucesos pueden no ser independientes.

En efecto, supongamos que el experimento de la extracción de las dos cartas de la baraja es ahora sin reemplazamiento, esto es, la primera carta que saquemos no la devolvemos a la baraja.

Consideramos los mismos sucesos que en el ejemplo anterior:
A = “La primera carta es de oros”.
B = “La segunda carta es de bastos”.

La pregunta que nos hacemos es si la probabilidad de B se ve influida por la ocurrencia de A, esto es, si B y B/A tienen o no la misma probabilidad.

P(B): Si no tenemos información de qué ha ocurrido en la primera extracción, tenemos cuarenta casos posibles, ya que no sabemos cuál es la carta que ha salido, puede ser cualquiera, y diez casos favorables, ya que tampoco sabemos si ha sido o no un basto.

Por consiguiente, $P(B)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0.25$

P(B/A): En cambio, si nos dicen que la primera carta ha sido un oro, ya tenemos más información: quedan sólo treinta y nueve cartas y de éstas diez son bastos. De manera que $P(B/A)=\frac{10}{39}=0.2564$

Es decir, la probabilidad de B ha variado. Como $P(B)\neq P(B/A)$, esto nos está diciendo que A influye en B. En este caso, B no es independiente de A.

Observación :

En los problemas de extracciones de cartas y similares, es fundamental la infomlación que nos dice si hay o no reemplazamiento de las cartas o no, pues esto influye en el cálculo y los resultados de la probabilidad. Por consiguiente, antes de intentar resolver un problema de este tipo, hemos de fijarnos en esta cuestión. Cuando el enunciado no nos diga nada, supondremos que las extracciones son sin reemplazamiento.

Propiedad 1:
Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B.

Es decir, si A no influye en B, B tampoco va a influir en A, de manera que P(B)=P(B/A) sii P(A)=P(A/B) y diremos simplemente que A y B son independientes.

De la misma manera, cuando digamos que A y B son dependientes significará que ambos se influyen mutuamente.

Propiedad 2:
Si A y B son independientes, entonces $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

No tenemos más que tener en cuenta que si B es independiente de A, entonces $P(B/A)=P(B)$, y este dato lo sustituimos en la fórmula de la probabilidad de la intersección de dos sucesos. Además, esta propiedad nos puede servir de criterio para saber si dos sucesos son o no independientes :

Calculando $P(A\cap B)$, *P(A)* y *P(B)*:

Si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, entonces A y B son independientes.
Si $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$, entonces A y B son dependientes.

Esta propiedad se puede generalizar para más de dos sucesos independientes.
Por ejemplo: A, B y C son sucesos independientes sii $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

<u>Ejemplo 5:</u>

Tenemos una baraja española de cuarenta cartas. Hacemos dos extracciones sucesivas. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caballos?

Lo primero es darnos cuenta de que las extracciones son sin reemplazamiento.
Para calcular la probabilidad pedida consideramos los sucesos A = “La primera carta es un caballo” y B = “La segunda carta es un caballo”.
La probabilidad que nos pide el enunciado es $P(A\cap B)$

Sabemos que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$

P(A): Hay cuatro casos favorables y cuarenta posibles, por tanto, $P(A)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0.1$
P(B/A): Si ha ocurrido A, ya ha salido un caballo, y como no hay reemplazamiento, quedan tres casos favorables de treinta y nueve posibles; de manera que $P(B/A)=\frac{3}{39}=\frac{1}{13}=0.076$

Por tanto la probabilidad de obtener dos caballos es
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=0.1\cdot 0.076=0.0076$

No llega al 1% el porcentaje de veces que obtendríamos dos caballos si realizásemos el experimento un número considerable de veces.

Ejemplo 6:

En un instituto de secundaria, el 75% de los alumnos viene andando, el 55% trae el bocadillo de su casa y el 35% viene andando y trae el bocadillo. Si escogemos al azar a un alumno del instituto, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a)Si viene andando, traiga bocadillo.
b)Si trae bocadillo, venga andando.
c)Venga andando y traiga bocadillo.

Consideremos los sucesos A = “EI alumno viene andando” y B = “El alumno trae bocadillo”
El enunciado del problema nos dice que: $P(A)=\frac{75}{100}=0.75$

$P(B)=\frac{55}{100}=0.55$

$P(A\cap B)=\frac{35}{100}=0.35$

Antes de comenzar los cálculos, entendamos bien los datos que tenemos: hay alumnos que vienen andando (75%) y alumnos que traen bocadillos (55%), y ambos subconjuntos están mezclados: de los que vienen andando, una parte traerá bocadillo y otra no; de los que traen bocadillo, una parte vendrá andando y otra no.

a) El suceso “si viene andando, traiga bocadillo” significa que con la condición de que el alumno viene andando, ha de traer bocadillo, esto es, estamos condicionados a que el alumno viene andando. No están preguntando por los alumnos del instituto con bocadillo, sino sólo por los que tienen bocadillo dentro dc los que vienen andando. Por tanto, el suceso es B/A.

Su probabilidad es $P(B/A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$

Sustituyendo, $P(B/A)=\dfrac{0.35}{0.75}=0.46$

Es decir, el 46% de los alumnos que vienen andando trae bocadillo

b) "Si trae bocadillo, venga andando" es quedarnos con los alumnos que traen bocadillo y plantearnos cuántos de éstos vienen andando. Es A/B.

Por tanto, $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.35}{0.55}=0.63$

El 63% de los alumnos que traen bocadillo vienen andando.

Podemos, por tanto, concluir que hay más proporción de alumnos que traen bocadillo entre los que no vienen andando que entre los que vienen andando.

c) "Venga andando y traiga bocadillo" ya lo hemos calculado, es $A\cap B$ y su probabilidad un dato del problema, 0.35.

Ejercicio 7:

En un municipio el policía municipal se pone enfermo 10 días al año. Por otra parte, el semáforo situado a la entrada del pueblo se estropea uno dc cada treinta días. Calcula la probabilidad de que mañana ni esté el policía en la calle ni funcione el semáforo.

7. PROBABILIDAD TOTAL.

Hay casos en los que un suceso puede producirse dependiendo de varias opciones que a su vez pueden ocurrir con una determinada probabilidad. Vamos a ver cómo calcular la probabilidad en estos casos. Lo hacemos a partir del siguiente Ejemplo:

"Una empresa comercializadora de naranjas opera en Málaga, Valencia y Rabat. En Málaga se recoge el 45% de la producción, en Valencia el 35% y en Rabat el 20%. Teniendo en cuenta que en Málaga se estropea el 8% de la cosecha, en Valencia el 12% y en Rabat el 4%, ¿cuál es el porcentaje de cosecha que se perderá?"
Si llamamos A = "La cosecha se estropea", tenemos que calcular P(A).
Si nos damos cuenta, lo que conocemos es la probabilidad de que la cosecha se estropee condicionada a cada uno de los tres lugares de producción:
Llamando M = "La cosecha es de Málaga", V = "La cosecha es de Valencia" y R = "La cosecha es de Rabat", el enunciado del ejercicio lo que nos dice es que

P(A/M) = 0.08 P(A/V) = 0.12 P(A/R) = 0.04

La probabilidad de A no es la suma de estas tres probabilidades, ya que no hay la misma producción en las tres localidades: En Málaga se estropea el 8% del 45%; en Valencia el 12% del 35% y en Rabat el 4% del 20%; por tanto, lo que tenemos que hacer es la suma ponderada de las tres probabilidades anteriores:

$$\frac{0.08\cdot 45+0.12\cdot 35+0.04\cdot 20}{100}=0.08\cdot 0.45+0.12\cdot 0.35+0.04\cdot 0.2=0.036+0.042+0.008=0.086$$

Por tanto, el 8.6% de la producción se estropea.

Esta operación puede entenderse más fácilmente si utilizamos un diagrama de árbol para escribir las probabilidades:

Lugar de producción	Posibilidades	Probabilidad
Málaga	Se estropea (0.08)	0.45·0.08
	No se estropea (0.92)	
Valencia	Se estropea (0.12)	0.35·0.12
	No se estropea (0.88)	
Rabat	Se estropea (0.04)	0.2·0.04
	No se estropea (0.96)	

Nos fijamos en las opciones que se corresponden con el suceso del problema (se estropea) y multiplicamos las probabilidades hasta llegar a ese resultado. Sumando los resultados de todos los productos obtenemos la probabilidad del suceso.

Utilizando el lenguaje matemático, podemos escribir el siguiente resultado:

Si tenemos n sucesos A_1, A_2, A_3,...,A_n que componen el espacio muestral: $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ e incompatibles dos a dos: $A_i \cap A_j = \varnothing$ (espacio completo de sucesos) entonces la probabilidad de un suceso A es:

$$P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(A/A_n) \cdot P(A_n)$$

A este resultado se le conoce con el nombre de teorema de la probabilidad total.

Traduzcamos el ejemplo anterior a este lenguaje:

Como estamos diciendo que la producción se realiza en tres lugares, éstos constituyen el espacio completo de sucesos:

- la producción se da o en Málaga, o en Valencia o en Rabat, cada una con una probabilidad distinta:

  A_1 = “La producción se da en Málaga”. $P(A_1) = 0.45$

  A_2 = “La producción se da en Valencia” $P(A_2) = 0.15$

  A_3 = “La producción se da en Rabat” $P(A_3) = 0.2$

  Nótese que estas producciones de cada lugar no son comunes (sucesos incompatibles).
  Y la unión de la tres producciones da la producción total (la unión es el espacio muestral).

- Y conocemos la probabilidad condicionada de cada suceso:

  $P(A/A_1) = 0.08$

  $P(A/A_2) = 0.12$

  $P(A/A_3) = 0.04$

Luego nótese que si estos datos los sustituimos en la fórmula anterior nos queda el resultado calculado mediante el diagrama de árbol.

<u>Ejercicio 8:</u>

Una empresa fabrica tornillos en Llodio y en Torrelavega. El 60% de la producción se realiza en el primer lugar, y el 40% restante en el segundo. Si en la fábrica de Llodio el 5% de las piezas son defectuosas y en Torrelavega el 2%:

a) Calcula la probabilidad de que elegido un tornillo al azar sea defectuoso.
b) ¿Por qué la probabilidad anterior no es la media aritmética? ((2+5)/2=3.5% de piezas defectuosas)

Ejercicio 9:

Tenemos tres urnas que contienen bolas negras y blancas. La primera tiene dos negras y cinco blancas; la segunda, tres negras y tres blancas, y la tercera cuatro negras y siete blancas. Si hay una probabilidad doble de elegir la lª urna en lugar de las otras dos, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar una bola sea negra?

8. TEOREMA DE BAYES.

Vamos a planteamos ahora el proceso contrario al descrito en el apartado anterior. Partamos del siguiente ejemplo: En un instituto de enseñanza secundaria, de los alumnos de bachillerato, el 60% estudia ciencias de la salud y el 40% ciencias sociales. De los primeros alumnos, aprueba todas las asignaturas el 35%, y de los segundos, el 25%.
Si nos preguntasen qué probabilidad existe de que elegido un alumno al azar haya aprobado todas las asignaturas, tendríamos que utilizar el teorema de la probabilidad total para contestar.
Pero supongamos que nos dicen que el alumno elegido ha aprobado todas las asignaturas, y lo que nos preguntan es: ¿qué probabilidad tenemos de que sea un alumno de sociales?
Para responder a esta pregunta utilizamos el llamado teorema de Bayes.

Escribamos los sucesos que aparecen:
El suceso del que se habla es A = “Aprobar todas las asignaturas en bachillerato”.

El espacio completo de sucesos es:
A_1 = “Ser de ciencias”, con $P(A_1) = 0.6$

A_2 = “Ser de sociales”, con $P(A_2) = 0.4$

También nos dan la proporción de aprobados en ciencias y en sociales, esto es, dos probabilidades condicionadas:

$P(A/A_1) = 0.35$ y $P(A/A_2) = 0.25$

Nos dicen que A ha ocurrido (el alumno elegido está aprobado) y nos preguntan cuál es la probabilidad de que sea de sociales, es decir, nos están preguntando por la probabilidad del suceso A_2/A.

Pues bien, utilizando la probabilidad de la intersección de sucesos:

$$P(A_2/A)=\frac{P(A_2\cap A)}{P(A)}$$

pues si ha ocurrido A, la probabilidad de A_2 es la proporción entre la parte común de ambos sucesos $A_2 \cap A$ y A.

Como, por otra parte, $P(A_2\cap A)=P(A\cap A_2)=P(A/A_2)\cdot P(A_2)$, sustituyendo en la anterior expresión:

$$P(A_2/A)=\frac{P(A/A_2)\cdot P(A_2)}{P(A)}$$

que es el teorema de Bayes.

Las probabilidades del numerador las conocemos; P(A) la calculamos utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(A)=P(A/A_1)\cdot P(A_1)+P(A/A_2)\cdot P(A_2)=0.35\cdot 0.6+0.25\cdot 0.4=0.21+0.1=0.31$$

Luego el 31% de los alumnos aprobó todas las asignaturas.

Sustituyendo este resultado en la fórmula del teorema de Bayes:

$$P(A_2/A)=\frac{P(A/A_2)\cdot P(A_2)}{P(A)}=\frac{0.25\cdot 0.4}{0.31}=\frac{0.1}{0.31}=0.32$$

Luego, de los alumnos que aprobaron, el 32% era de sociales.

Las probabilidades utilizadas reciben los siguientes nombres:

$P(A_i)$: probabilidades a priori

$P(A/A_i)$: verosimilitudes

P(Ai/A): probabilidades a posteriori

Evidentemente, el teorema se puede utilizar no sólo para calcular $P(A_2/A)$ sino cualquier probabilidad a posteriori.

$$P(A_i/A)=\frac{P(A/A_i)\cdot P(A_i)}{P(A)}=\frac{P(A/A_i)\cdot P(A_i)}{P(A/A_1)\cdot P(A_1)+P(A/A_2)\cdot P(A_2)+\cdots+P(A/A_n)\cdot P(A_n)}$$

Nótese que el adjetivo de las primeras, a priori, hace referencia a que es la probabilidad de los sucesos A_i antes de que sepamos que A se ha realizado.

En cambio, a posteriori, lo que nos indica es que, al haberse realizado el suceso A, las probabilidades condicionadas a este suceso, cambian ($P(A_i / A) \cdot P(A_i)$).

EJERCICIOS SOBRE PROBABILIDAD

1) Escribe el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de cuatro monedas distintas.

2) En una ciudad se realiza un estudio estadístico sobre la audiencia de tres cadenas de televisión, una estatal (E), otra autonómica (A) Y otra privada (P), arrojando la encuesta los siguientes resultados:

   La cadena estatal tiene una audiencia media del 45%, la autonómica del 35% y la privada del 26%. Además, el 20% de los encuestados ve habitualmente la pública y la autonómica el 8% la autonómica y la privada, el 6% la pública y privada, y el 2% ve las tres cadenas.

   a) Representa los datos anteriores utilizando los diagramas de Venn.
   b) Calcula el porcentaje de audiencia que:

      i. Ve la televisión.
      ii. Ve la cadena estatal pero no la autonómica.
      iii. Ve las tres cadenas.
      iv. No ve ninguna de las tres cadenas.
      v. Ve como mínimo dos cadenas.

   c) Indica qué sucesos son los anteriores utilizando operaciones con sucesos.

3) Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.

   a) Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento, utilizando la letra “s” para las respuestas afirmativas y la “n” para las negativas.
   b) ¿Qué elementos del espacio muestral constituyen el suceso “al menos dos personas son partidarias de consumir el producto”?
   c) Describe el suceso contrario de “más de una persona es partidaria de consumir el producto”.

4) Utilizando un diagrama de árbol, calcula de cuantas maneras posibles se puede desarrollar un partido de tenis que se juega al mejor de cinco sets.

5) Una persona tiene tiempo para jugar a la ruleta cinco veces. Gana o pierde 10 € en cada juego. Empieza a jugar con 20 € y deja de jugar si pierde todo su dinero o gana 30 € (llega a 50 €). Describe cómo puede desarrollarse el juego.

6) Sea el experimento consistente en lanzar dos veces un dado y sumar la puntuación de la cara superior.

   a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

b) Escribe alguno de los sucesos elementales.
c) ¿Cuál es el suceso seguro?
d) ¿Y el imposible?
e) Sea el suceso A = “Obtener de seis a nueve”. ¿Cuál es el suceso contrario?
f) Sean A = “Uno de los dados es un cinco”, B = “La suma es mayor que 7”. ¿Cuál es el suceso A/B?

7) En una urna blanca tenemos 30 bolas, de las que quince son rojas, nueve verdes y seis blancas. Extraernos las bolas un número muy grande de veces, retornándolas a la urna después de cada extracción y anotando el color de la bola extraída. ¿A qué valor se aproximará la frecuencia relativa de cada uno de los colores? ¿En qué te basas para afirmarlo?

8) Tenemos una urna con 200 bolas de colores, pero desconocemos cuantas hay de cada color. Realizamos distintas extracciones, retornando la bola a la a después de cada extracción. ¿Cuál crees que es la composición de la urna?

Nº de extracciones	10	100	200	500	1000	5000	10000
Bolas azules	2	28	52	127	252	1240	2500
Bolas amarillas	0	15	23	63	124	620	1250
Bolas verdes	8	57	125	310	624	3140	6250

9) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados salga por suma o bien tres, o bien cuatro o bien cinco?

10) Se ha comprobado que en una ciudad está enfermo con diarrea el 60% de los niños, con sarampión el 50% y con ambas enfermedades el 20%.

a) Calcula la probabilidad de elegido un niño al azar, esté enfermo.
b) En un colegio con 450 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que estén enfermos?

11) Extraemos sucesivamente y sin reemplazamiento dos cartas de una baraja española. ¿A qué apostarías?

a) Salir dos figuras.
b) Salir dos oros.

12) Sean A, B y C tres sucesos tales que $p(A)=0'2$, $p(B)=0'4$, $p(C)=0'5$, $p(A\cap B)=0'1$, $p(A\cap C)=0'07$, $p(B\cap C)=0'15$ y $p(A\cap B\cap C)=0'03$. Calcula las probabilidades de los sucesos:

a) $A\cup B$.
b) $A\cup C$.
c) $A\cup B\cup C$.

13) Sean A y B dos sucesos independientes tales que $p(A)=0'5$ y $p(A)=0'35$. Calcula la probabilidad de:

a) $\overline{A}$
b) $B \setminus A$
c) $A \cap B$
d) $A \cup B$
e) Explica como influye la independencia en el cálculo de las anteriores probabilidades.

14) En un experimento aleatorio se dan cuatro sucesos elementales *A*, *B*, *C* y *D*. Si $p(A)=0'3$, $p(B)=0'25$, $p(C)=0'15$, ¿cuál es la probabilidad de *D*?

15) Sean A y B dos sucesos de probabilidad $p(A)=0'7$, $p(B)=0'45$ y $p(A \cap B)=0'25$. Calcula la probabilidad de los sucesos:

a) $A \cup B$.
b) $\overline{A} \cap \overline{B}$.

16) Sean A y B dos sucesos incompatibles tales que $p(A)=\frac{1}{3}$ y $p(B)=\frac{1}{4}$. Halla $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

17) Al lanzar dos dados diferentes y realizar el experimento de sumar los puntos, determina la probabilidad de:

a) Sumar tres.
b) Sumar siete.
c) Sumar doce.

18) Calcula la probabilidad de que al lanzar tres monedas distintas:

a) Salgan tres caras.
b) Salga como mínimo una cara.
c) Salgan más cruces que caras.

19) Se ha trucado una moneda de manera que la probabilidad de cara es triple que la de cruz. ¿Cuál es la probabilidad de cada suceso elemental?

20) Un dado está trucado de manera que la probabilidad de cada cara es directamente proporcional al número de ésta. Calcula las siguientes probabilidades:

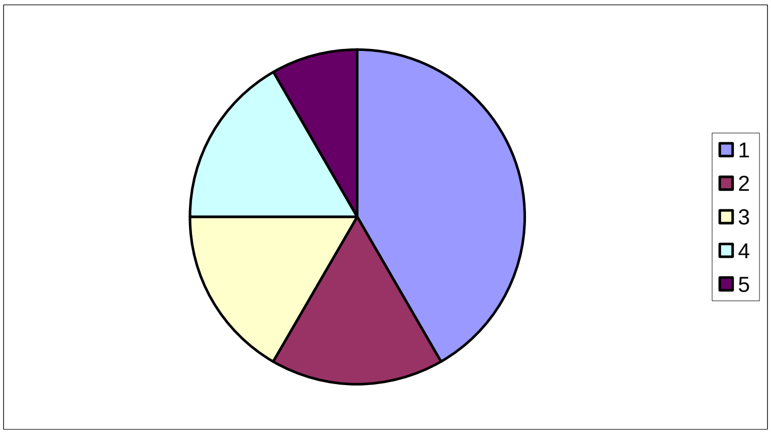
a) La de cada cara.
b) La de sacar número par.
c) La de obtener múltiplo de tres.

21) Calcula la probabilidad, al extraer sucesivamente dos cartas de una baraja española, de obtener dos ases.

22) En una ciudad se leen tres periódicos *A*, *B* y *C*. El 30% de la población lee el *A*, el 25% el *B* y el 18% el *C*. El 12% lee *A* y *B*, el 10% *A* y *C*, el 5% *B* y *C*; los tres periódicos los lee el 2% de la población. Calcula la probabilidad de que, elegido al azar un ciudadano:

a) Lea el periódico.
b) No lea ningún periódico.
c) Lea como mínimo, dos periódicos.
d) Lea *A* y *C*.
e) Lea *A* pero no *C*.
f) No lea *A*.

23) Considera la ruleta de la figura:



Sabemos que $p(2) = p(3) = p(4) = \frac{1}{6}$ y que $p(5) = \frac{1}{12}$

a) Calcula $p(1)$
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la ruleta salga un número par?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener gris?
d) Sabiendo que se ha obtenido gris, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar?

24) A un zoo llega un gorila. La probabilidad de que sobreviva ocho años es $\frac{1}{3}$. En el zoo hay ya otro gorila cuya probabilidad de sobrevivir ocho años es $\frac{2}{3}$, ya que está aclimatado a su hábitat. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Ambos están vivos dentro de ocho años.
b) Al menos uno vive dentro de ocho años.
c) Los dos están muertos dentro de ocho años.

d) Dentro de ocho años sólo viva el gorila primitivo.

25) Se extraen sucesivamente y sin reintegrarlas a la baraja, tres cartas de una baraja española de cuarenta cartas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean del mismo palo?
b) ¿Cuál sería esta probabilidad en el caso de que sí se fuesen reintegrando las cartas?

26) La moneda del ejercicio 19 se lanza dos veces. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Obtener dos caras.
b) Obtener dos resultados distintos.

27) (D) En la consulta de un médico hay doce pacientes, de los que seis tienen gripe, cuatro problemas digestivos y dos problemas de alergia. Elegidos tres enfermos al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Tengan enfermedades distintas.
b) Tengan la misma enfermedad.

28) (D) Los motores de un avión tienen la probabilidad de estropearse de un cinco por mil. Un avión puede realizar un aterrizaje de emergencia si funciona, al menos, el 50% de sus motores. ¿Qué crees que es más seguro, un bimotor o un cuatrimotor?

29) Si los sucesos A y B son independientes y $0 < p(A) < p(B) < 1$, ¿cuáles de las siguientes probabilidades son ciertas?

a) $p(A \cap B / B) = p(B)$
b) $p(B / \overline{A}) = p(B)$

30) Se extrae una cana de una baraja española de cuarenta y, sin reintegrarla a la baraja, se extrae otra. Calcula la probabilidad de que:

a) Saquemos dos oros.
b) Saquemos oro sólo en la segunda extracción.

31) Lanzamos un dado tres veces consecutivas. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Salir tres 6.
b) No obtener ningún 6.
c) Obtener como mínimo un 6.
d) Obtener tres resultados distintos.

32) Se lanzan dos dados y dos monedas. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Salir dos 6 y dos caras.
b) Salir dos 6, una cara y una cruz.
c) Salir dos parejas, tanto en los dados como en las monedas.

33) La probabilidad de que al llamar a la centralita de Psicología el teléfono esté comunicando es 0’3. La probabilidad de que la telefonista nos diga que la extensión solicitada comunica es 0’2. Halla la probabilidad de que logremos comunicar con la extensión deseada.

34) Se lanzan dos dados diferentes. Construye el espacio muestral asociado a esto experimento y calcula la probabilidad de obtener los siguientes sucesos:

a) Obtener al menos un cinco.
b) La suma de las puntuaciones obtenidas es menor o igual que tres.

35) Se tiene una urna con cinco bolas rojas, tres amarillas y dos verdes. Se extraen dos bolas sucesivamente. Halla las siguientes probabilidades:

a) Las dos bolas son rojas.
b) La primera bola es roja y la segunda azul.
c) Una bola es roja y otra azul

36) En un cajón se tienen cuatro camisas blancas, tres rojas y dos azules. Se sacan dos camisas al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Las dos sean del mismo color.
b) Al monos una sea blanca.

37) Una comisión del Parlamento está formada por doce diputados, de los cuales sois pertenecen al partido *A*, cuatro al *B* y dos al *C*. Se escogen al azar tres portavoces. Calcula la probabilidad de que los tres pertenezcan:

a) A partidos distintos.
b) Al partido *A*.
c) Al partido *C*.

38) La tabla siguiente muestra el resultado de cien ecografías:

	Sexo real ♂	Sexo real ♀
Resultado ecografía ♂	10	11
Resultado ecografía ♀	38	41

Calcula la probabilidad de que:

a) Si la ecografía daba niña, el sexo real sea niña.
b) Si la ecografía daba niña, el sexo real sea niño.
c) Si la ecografía daba niño, el sexo real sea niño.

d) Si la ecografía daba niño, el sexo real sea niña.
e) La ecografía acierta.

39) Se aplica la prueba de la tuberculosis a una población; una de cada diez mil personas en las que el test dio negativo tenía la enfermedad y una de cada cien de las que dio positivo también. Si el $\frac{1}{100}$ dio positivo, ¿qué porcentaje de la población padece la enfermedad?

40) Se tienen treinta dados normales y tres cargados, en los que la probabilidad de obtener un seis es triple que la de no obtenerlo. Elegimos un dado al azar y lo lanzamos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un seis?
b) Si se obtiene un seis, ¿cuál es la probabilidad de que esté cargado?

41) En una clase hay 22 alumnos y 18 alumnas. 14 alumnos y 14 alumnas han aprobado un examen Se escoge un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado?

42) Una empresa de productos lácteos elabora sus productos en tres factorías *A*, *B* y *C*. Las cuotas de producción de cada factoría y el porcentaje de productos defectuosos son los siguientes:

	A	*B*	*C*
cuotas de producción	0’35	0’4	0’25
envasado defectuoso	0’02	0’01	0’03

Si se toma un producto de esta marca al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su envasado sea defectuoso?

43) Una empresa que fabrica latas de refrescos utiliza cuatro máquinas distintas. Con la primera fabrica el 60% de la producción, con la segunda el 20%, con la tercera el 15%, y con la cuarta el 5%. Las máquinas fabrican un porcentaje de latas defectuosas de 1%, 2%, 3% y 5% respectivamente. Si se escoge una lata al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea defectuosa? Si la lata escogida no fue defectuosa, ¿qué probabilidad hay que sea de la segunda máquina?

44) Se tienen cuatro bolsas con cinco bolas cada una. La primera tiene tres blancas y dos negras; la segunda, cinco negras; la tercera, cuatro blancas y una negra; la cuarta, dos blancas y tres negras. Se escoge una bolsa al azar y se extrae una bola que resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolsa escogida fuese la tercera?

45) Se tienen las mismas bolsas que en la pregunta anterior, pero ahora tu bolsas se escogen con el siguiente procedimiento Se lanza un dado, si sale un uno se escoge la bolsa primera; si sale un dos, la segunda; sí sale un tres o un cuatro, la tercera, y si sale un cinco o un seis la cuarta. Se extrae una bola y resulta que es negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolsa escogida fuese la tercera?

46) Un equipo gana cuatro partidos de cada seis jugados en casa, dos de cada cinco que juega fuera.

a) Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcula la probabilidad de que gane.
b) Si el último partido lo ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo jugara en casa?

47) En la construcción de un aparato intervienen tres máquinas para fabricar las piezas que lo componen. La primera fabrica un 1% de piezas defectuosas, la segunda un 1’5% y la tercera un 2%.

a) Calcula la probabilidad de producir un aparato defectuoso (lo será si tiene al menos una de sus piezas defectuosas).
b) Si el aparato es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que tenga únicamente la pieza fabricada por la primera fábrica defectuosa?

48) En el vestíbulo de un casino hay dos máquinas tragaperras que permiten ganar con probabilidad 0’1. Una de ellas se estropea y entonces la probabilidad de ganar con ella es de 0’5.

a) Si eliges una máquina al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea la estropeada?
b) Si juegas una vez y ganas, ¿cuál es la probabilidad que sea con la máquina estropeada?
c) Si escoges una de las dos máquinas, pierdes y quieres volver a jugar, ¿debes insistir con la misma o cambiar de máquina?

49) Un trabajador debe tomar un tren para ir a su trabajo. Si coge el de las 7 a.m. la probabilidad de llegar puntual al trabajo es 0’9. Si lo pierde, llega tarde al trabajo el 40% de las veces. Sabiendo que lo pierde el 20% de las veces, calcula la probabilidad:

a) De que llegue puntual.
b) Haya cogido el tren de las siete sabiendo que ha llegado puntual a su trabajo.
c) Haya perdido el tren si ha llegado tarde.
d) Si trabaja 225 días al año, ¿cuántos se espera que llegue tarde al trabajo y cuántos puntual? ¿Habrá mucho error en esta predicción?

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Presentamos a continuación diversos modos de resolver un problema. No obstante, el paso previo será leer detenidamente el enunciado y comprenderlo, para poder diseñar una estrategia que nos lleve a la solución. Aquí ofrecemos varios métodos. Dependiendo de los datos del problema, de su enunciado, de la creatividad del alumno,... podremos encontrar diversos caminos para solucionarlo.

1) CÁLCULO DE PROBABILIDADES A PARTIR DE LA LEY DE LAPLACE

Recordemos que para poder utilizar este método los sucesos elementales han de ser equiprobables. Hemos de contar los casos posibles del experimento y cuántos de éstos son favorables.

"Lanzamos dos veces un dado que no está trucado. Calcula la probabilidad de obtener más de cinco en la suma de los dos dados"

Sabemos que para este ejemplo el espacio muestral consta de 36 sucesos elementales, luego existen 36 casos posibles al lanzar dos dados.

El sucesos A = "Obtener más de cinco en la suma de los dados" es, por extensión:

$$A=\{(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),$$
$$(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}^{\wedge}$$

Luego tenemos 26 casos favorables y 36 posibles, de manera que $p(A)=\frac{26}{36}=0'72$.

2) CÁLCULO DE PROBABILIDADES A PARTIR DE OPERACIONES CON SUCESOS:

Para aplicar las operaciones con sucesos a problemas de probabilidad es necesario conocer el significado de la unión, la intersección, el contrario, la diferencia y restantes propiedades de las operaciones.

"En una urna tenemos 100 bolas; 60 son negras, 45 son de plástico y 12 son blancas y de cristal. ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar una bola negra y de plástico?"

Sean los sucesos A = "Obtener bola negra" $p(A)=\frac{60}{100}=0'6$

B = "Obtener una bola de plástico" $p(B)=\frac{45}{100}=0'45$

$A\cup B$ es "La bola es negra o de plástico", luego $\overline{A\cup B}$ es "La bola no es negra ni de plástico", es decir, es blanca y de cristal. Como hay 12 bolas de estas características y un total de 100 bolas, tenemos:

$$p\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{12}{100}=0'12\Rightarrow p\left(A\cup B\right)=1-p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-0'12=0'88$$

"Bola negra y de plástico" es $A\cap B$; utilizando la probabilidad de la unión de dos sucesos:

$$p\left(A\cup B\right)=p\left(A\right)+p\left(B\right)-p\left(A\cap B\right)\Rightarrow 0'88=0'6+0'45-p\left(A\cap B\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow p\left(A\cap B\right)=1'05-0'88=0'17$$

3) RECONVERSIÓN EN UN MODELO UNIFORME.

Hay veces en que los sucesos elementales de un experimento aleatorio no son equiprobables, de manera que no podríamos aplicar la ley de Laplace para resolver el problema. En estos casos, hemos de intentar reconvertirlo en un experimento cuyos sucesos elementales sí sean equiprobables.

"Consideramos la ruleta de la figura. Observamos que el área de las partes coloreadas es doble que la de las blancas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un cuatro?
b) ¿Y la de un número impar?"

Como vemos, los sucesos no tienen todos la misma probabilidad, puesto que a unos les corresponde más área que a otros.

Para que todos los sucesos sean equiprobables, lo que hacemos es dividir el círculo en segmentos circulares de igual tamaño:

De esta manera hay doce casos posibles (los doce sectores del mismo tamaño).

a) El suceso A = "obtener un cuatro" dispone de dos casos favorables, luego $p\left(A\right)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.
b) El suceso B = "obtener número impar" consta de cinco casos favorables, luego $p\left(B\right)=\frac{5}{12}$.

4) UTILIZACIÓN DE DIAGRAMAS DE ÁRBOL.

Cuando haya que elegir entre varias opciones para calcular una probabilidad, suele ser de utilidad el dibujar un diagrama de árbol para calcularla más fácilmente; esto ocurre, por ejemplo, si se repite varias veces un experimento, o en ejercicios de probabilidad total en los que podemos distinguir varias posibilidades a partir del espacio completo de sucesos.

- **"En una bolsa hay cinco bolas blancas y tres azules; al extraemos cuatro bolas, ¿cuál a la probabilidad de que salgan dos de cada color?"**

  En primer lugar, considerar que el experimento es sin reemplazamiento, puesto que no se nos dice lo contrario.

El diagrama de árbol asociado al experimento sería el siguiente:

Para calcular la probabilidad pedida, no tenemos más que fijarnos en las ramas en las que se realiza el suceso pedido. La probabilidad do cada una de ellas se calcula multiplicando las Probabilidades parciales en cada opción. La probabilidad pedida es la suma de estas probabilidades, ya que corresponden a sucesos incompatibles:

- **"En una ciudad, el 55% de las personas en edad de trabajar son hombres; de ellos, el 15% está en paro. Por el contrario, entre las mujeres, el porcentaje de desempleo es el 25%. Si la población laboral en dicha ciudad es de 154.750 personas, ¿cuántas de ellas se espera que estén en paro?**

Para responder a esta pregunta, lo que vamos a hacer primero es calcular la probabilidad de que elegido un ciudadano en edad de trabajar, esté en paro. Si nos damos cuenta, la población aparece dividida en dos categorías, hombres y mujeres, y conocemos el porcentaje de paro para cada sector; por consiguiente, estamos ante un caso de un problema de probabilidad total.

Podríamos aplicar la fórmula directamente para resolverlo. En cambio, vamos a hacerlo utilizando un diagrama de árbol.

Consideremos los sucesos:

A = "Ser hombre" B = "Ser mujer" D = "Estar en paro"

Los datos que nos da el problema son:

$p(A) = 0'55$ $p(B) = 0'45$

$p(D/A) = 0'15$ $p(D/B) = 0'25$

Tenemos que calcular $p(D)$.

Como *A* y *B* son sucesos excluyentes (forman un espacio completo de sucesos), podemos hacer el siguiente diagrama que muestra la distribución de población y la probabilidad que le corresponde:

SEXO	*OCUPACIÓN*	*PROBABILIDAD*
A (0'55)	*EN PARO* D/A (0'15)	$\rightarrow 0'55 \cdot 0'15 = 0'0825$
	TRABAJA $\bar{D}/A$ (0'85)	
B (0'45)	*EN PARO* D/B (0'25)	$\rightarrow 0'45 \cdot 0'25 = 0'1125$
	TRABAJA $\bar{D}/B$ (0'75)	

De manera que la probabilidad pedida es $0'55 \cdot 0'15 + 0'45 \cdot 0'25 = 0'0825 + $ $+ 0'1125 = 0'195$, es decir, el 19'5% de la población está en paro.

Con este resultado podemos calcular ahora el número de personas desempleadas: si el total de población en edad de trabajar es 154.750, las que están en paro son 0'195·154.750 = 30.176. Luego 30.176 personas se encontrarán en paro.

5) CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON EXPERIENCIAS SUCESIVAS.

En numerosos experimentos aleatorios, se producen extracciones de elementos y la probabilidad se ve condicionada por el hecho de que se produzcan o no reemplazamientos en las citadas extracciones.

Veamos un mismo experimento cómo varía la probabilidad dependiendo de esto:

"Tenemos una urna con tres bolas negras y cinco rojas. Extraemos dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean negras?"

a) Consideremos que no hay reemplazamiento, esto es, que sacarnos una bola y no la introducimos en la urna.

Sean los sucesos *A* = "la primera bola es negra" y *B* = "la segunda bola es negra"
Saldrán las dos bolas negras cuando ocurra *A* y ocurra *B*, es decir, $A \cap B$:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

$p(A)$: Como hay tres bolas negras y ocho en total, tenemos $p(A) = \frac{3}{8} = 0'375$

$p(B/A)$: Ha ocurrido *A* y no hemos introducido en la urna la primera bola, luego quedan siete bolas de las que dos son negras, por tanto, $p(B/A) = \frac{2}{7} = 0'2857$

De donde $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = 0'375 \cdot 0'2857 = 0'107$

b) Consideremos ahora que no hay reemplazamiento, o sea, sacamos una bola, vemos cuál es su color y la volvemos a introducir en la urna.

En este caso:

$p(A)$ no varía: $p(A)=\frac{3}{8}=0'375$

$p(B/A)$: sigue habiendo ocho bolas, de las que tres son negras, luego $p(B/A)=\frac{3}{8}=0'375$ (nótese que B y A serían independientes).

Con lo que $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)=0'375\cdot 0'375=0'1406$.

Luego la probabilidad es distinta que en el anterior caso.

Por consiguiente, el hecho de reemplazar o no reemplazar influye en el resultado del experimento.

6) CÁLCULO DE PROBABILIDADES A PARTIR DEL SUCESO CONTRARIO.

En determinadas ocasiones, es más sencillo calcular la probabilidad del suceso contrario al que se refiere el ejercicio. Por ejemplo, suele ocurrir en problemas de uniones e intersecciones (leyes de Morgan).

“La probabilidad de que un jugador de tiro con arco dé en el blanco es 0’65. Si lanza tres disparos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos acierte una vez?”

Si considerarnos los sucesos $A_1=$ “El primer disparo da en el blanco”, $A_2=$ “El segundo disparo da en el blanco" y $A_3=$ “El tercer disparo da en el blanco”, que acierte al menos una vez es que acierte la lª o la 2ª o la 3ª, esto es, $A_1\cup A_2\cup A_3$.

Más fácil que calcular la probabilidad de esta unión es hallar la probabilidad de su contrario: lo opuesto a acertar al menos una vez es “fallar todas las veces”, esto es, fallar la 1ª vez y la 2ª y la 3ª. Es el suceso $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$.

Además, como los tres sucesos son independientes, resulta que $p\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right)=p\left(\overline{A_1}\right)\cdot p\left(\overline{A_2}\right)\cdot p\left(\overline{A_3}\right)=0'35\cdot 0'35\cdot 0'35=0'042875$ (hemos utilizado la probabilidad del suceso contrario: 1-0’65 = 0’35).

Por consiguiente, la probabilidad de fallar es 0’042875, de manera que la probabilidad de que al menos uno de los disparos dé en el blanco es 1-0’042875 = 0’957125.

7) JUEGOS DE AZAR.

El mundo de los juegos de azar está lleno de creencias totalmente ilógicas que en general se dan por válidas y si nos ponemos a razonar con un poco de lógica y hacemos uso de la probabilidad podemos darnos cuenta de que son falsas. Veamos alguna de ellas:

a) **No jugar a un número de lotería porque salió premiado en el sorteo anterior.**

Si nos dicen que el viernes pasado el número premiado en el sorteo de la ONCE fue el 12.572, alguien podrá decir que esta semana no quiere jugar a dicho número porque si salió la semana pasada es imposible que vuelva a salir en esta. Algo de verdad hay en esta afirmación, pero mucho de irracionalidad.

En efecto, el sorteo de la semana anterior y el de ésta son independientes, luego lo que ocurrió la semana pasada no influye en ésta. Por tanto, la probabilidad de salir esta semana el 12.572 es la misma que la semana anterior. Y como todos los números tienen la misma probabilidad de salir (1 caso favorable y 100.000 posibles) también puede resultar premiado este número igual que la semana anterior.

Lo único que podemos decir a favor de no jugar al mismo número, es que la probabilidad de un suceso, como muy bien nos dice la ley de los grandes números, se refiere a la frecuencia relativa que se espera en un suceso cuando un experimento se realiza muchas veces: por tanto, cuando se repite "un número muy grande de veces un experimento" en las mismas condiciones, sólo saldrá dicho número una de cada cien mil veces, pero lo que no sabemos es, si las pocas veces que esto ocurra, van a ser seguidas o no, esto es, si jugamos quinientas mil veces a ese número, seguro que cinco de ellas va a salir premiado, pero lo que no sabemos es cuando: puede que sean dos veces seguidas.

Cuidado, pues, con las creencias irracionales.

b) **Pensar que sí jugamos "mucho" en una máquina tragaperras al final conseguiremos ganar una cantidad importante de dinero:**

Otra falacia en el mundo de los juegos de azar. Fijémonos si no en el siguiente ejemplo:

"Una máquina tragaperras da los siguientes premios por cada cincuenta céntimos jugados:

Figura	**Premio**
@@@	40 €
* $ *	10 €
+ * +	5 €
@ + $	2'5 €
- & -	1'5 €
< - >	50 cent.

¿Cuánto devuelve la máquina si gastamos 2000 € en partidas?"

Como cada partida cuesta 50 céntimos, con 2000 € podremos jugar 4.000 partidas. Veamos cuantas veces aparecerá cada uno de los premios.

Para ello calculamos la probabilidad de cada suceso.

Para hallar $p(@)$, hemos de tener en cuenta que hay ocho símbolos distintos, luego su probabilidad es $\frac{1}{8}$. Lo mismo ocurre para cada uno de los restantes sucesos.

Además, si queremos calcular la probabilidad de cada premio, hemos de tener en cuenta que está formado por tres sucesos independientes. Por ejemplo, @+$ es el suceso "La primera figura es @, la segunda figura es +, y la tercera figura es $". Tenemos, pues, una probabilidad de la intersección de sucesos, y como cada uno no influye en los restantes, son independientes. De manera que $p(@+\$)=p(@)\cdot p(+)\cdot p(\$)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{512}=0'001953$ (o sea., aproximadamente, dos de cada mil veces obtenemos este premio).

Es importante darnos cuenta que los seis tipos de premios tienen esta misma probabilidad, ya que todos los sucesos elementales son equiprobables. La pregunta que nos surge es, que si todos los premios tienen la misma probabilidad, dónde está el "truco" del juego. La respuesta es que en la diferencia entre lo que nos cuesta jugar y la cantidad que la máquina da en premios.

En efecto, si jugamos cuatro mil partidas, para calcular el número de veces que aparecerá cada premio no tenemos más que multiplicar su frecuencia por cuatro mil, así que @@@ aparecerá $4000\cdot\frac{1}{512}\approx 7'8125$ veces y lo mismo los restantes premios, puesto que todos tienen la misma probabilidad. Ahora, consideremos la ganancia que produce cada uno:

@@@ aparece 7,8125 veces, luego ganamos $7'8125\cdot 40=312'5$ €

$ da un premio de 10 €, luego ganamos $7'8125\cdot 10=78'125$ €
Con +*+ ganamos $7'8125\cdot 5=30'0625$ €
Con @+$, $7'8125\cdot 2'5=19'53125$ €
Si sale -&-, el premio es $7'8125\cdot 1'5=11'71875$ €
Y con <->, $7'8125\cdot 0'5=3'90625$ €.

Luego, sumando las anteriores cantidades, resulta que después de jugar 4.000 partidas hemos ganado 455'84 €. Y nos hemos gastado 2000 €. Las cifras hablan por sí solas.

c) **Jugar todas las semanas a la primitiva porque al final nos va a tocar un premio multimillonario:**

Otra prueba más de "que de ilusiones también se vive".

En efecto, supongamos que hemos jugado seis números en el sorteo. Veamos cual es la probabilidad de que todos ellos salgan en la combinación ganadora.

Estos cálculos podrían realizarse con la herramienta de los números combinatorios; como no los hemos estudiado todavía, vamos a utilizar la probabilidad de la intersección para hacerlos.

Llamemos $A_1=$ "La primera bola que sale es de mi combinación".
$A_2=$ "La segunda bola que sale es de mi combinación"

………

$A_6 =$ “La sexta bola que sale es de mi combinación”.

Ganaremos el premio cuando ocurran estos seis sucesos conjuntamente, esto es, cuando se realice su intersección. De manera que para calcular su probabilidad tendremos que hallar esta probabilidad, que como sabemos se hace utilizando la probabilidad condicionada, ya que al no haber reemplazamiento, la probabilidad de cada suceso influye en la siguiente.

$$p\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6\right) = p\left(A_1\right) \cdot p\left(A_2 / A_1\right) \cdot p\left(A_3 / A_1 \cap A_2\right) \cdots$$
$$\cdot p\left(A_6 / A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_5\right)$$

Como hemos elegido seis números de entre cuarenta y nueve:

$$p\left(A_1\right) = \frac{6}{49}$$

$p\left(A_2 / A_1\right)$: si el primer número es de los nuestros, quedan cinco números elegidos por nosotros (casos favorables) sobre cuarenta y ocho posibles (hay una bola menos): $p\left(A_2 / A_1\right) = \frac{5}{48}$

Razonando análogamente podemos calcular las restantes probabilidades, de manera que la probabilidad que estamos hallando es:

$$p\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6\right) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} =$$
$$= \frac{720}{10.068.347.520} = 0'00000007151$$

Como $\frac{10.068.347.520}{720} = 13.983.816$, podemos asegurar que cuando juguemos “sólo” unos catorce millones de veces a la primitiva tendremos la seguridad de que habremos ganado una vez.

Dejamos para el alumno que calcule si le compensa gastarse esta cantidad en jugar.